

N^o d'enregistrement
au C.N.R.S.
A.O. 10 033

THESES

présentées

A L'UNIVERSITE DE PROVENCE

pour obtenir

le grade de docteur es sciences physiques

par

Daniel FARGUE

1^o THESE : SUR LA CONNEXION DES PROPRIETES HEREDITAIRES
ET HAMILTONIENNES DES SYSTEMES CHARGES

2^o THESE : PROPOSITIONS DONNEES PAR LA FACULTE

Soutenues le 30 Mai 1974 devant la Commission d'Examen

MM. J.M. SOURIAU Président

P. CASAL
F. FER
T. VOGEL } Examineurs

N° d'enregistrement
au C.N.R.S.
A.O. 10 033

THESES

présentées

A L'UNIVERSITE DE PROVENCE

pour obtenir

le grade de docteur es sciences physiques

par

Daniel FARGUE

1° THESE : SUR LA CONNEXION DES PROPRIETES HEREDITAIRES
ET HAMILTONIENNES DES SYSTEMES CHARGES

2° THESE : PROPOSITIONS DONNEES PAR LA FACULTE

Soutenues le 30 Mai 1974 devant la Commission d'Examen

MM. J.M. SOURIAU Président

P. CASAL }
F. FER } Examineurs
T. VOGEL }



PERSONNEL ENSEIGNANT

(U.E.R. Scientifiques)

Professeurs titulaires

MM. BIZOUARD Michel	Physique
BLANCHARD André	Mathématiques générales
Mme BLANCHARD Christiane	Mathématiques
MM. BODIOU Georges	Mathématiques appliqués
BODOT Aubert	Chimie
BONNEAU Marcel	Mathématiques
CADILHAC Michel	Physique
CARPENI Georges	Chimie
CASAL Pierre	Mécanique rationnelle et appliquée
Mlle CLARION Claire	Mécanique des Fluides
MM. DESNUELLE Pierre	Chimie biologique
DOUCET Yves	Physique
FAVRE Alexandre	Mécanique de l'atmosphère et météorologie
FEHRENBACH Charles	Astronomie
FOURES Léonce	Mathématiques
FRAISSE Roland	Mathématiques
Mme FURNESTIN Marie-Louise	Biologie animale
MM. GIRARDIE Adrien	Zoologie
GOUVERNET Claude	Géologie appliquée
HERVE Jacques	Electronique
HUGON Maurice	Psycho-physiologie
JULG André	Chimie théorique
LAFFITTE Marc	Chimie
MALE Damien	Physique
MANDELBORJT Jacques	Physique
MARGHIS-MOUREN Guy	Chimie biologique
MERICOUX Roger	Physique industrielle
NAUDET Maurice	Chimie des corps gras
NEGRE Robert	Biologie végétale
SIMON Claude	Physiologie animale
SOURIAU Jean-Marie	Méthodes mathématiques de la physique
Mme TAXY Suzanne	Géologie historique
MM. VALENSI Jacques	Mécanique expérimentale des fluides
VISCONTI Antoine	Physique théorique.

Professeurs sans chaire

MM.	BOREL Fernand	Techniques mathématiques de la physique
	BOUDET Roger	Mathématiques
Mle	CATZIGRAS France	Géologie historique
Mle	CHANDEBOIS Rosine	Biologie animale
M.	COMBET Serge	Chimie
Mme	DELACHE Solange	Mathématiques
MM.	FEUGEAS Claude	Chimie
	FOUGEREAU Michel	Biochimie
	GILLET André	Mathématiques
	GUENOCHÉ Henri	Mathématiques appliquées
	GUERMEUR Robert	Physique
	HALBWACHS Francis	Physique
	HENNEQUIN Jacques	Electronique
	MANUCEAU Jérôme	Mathématiques
	MERDY Henri	Physique
Mle	PICHENOT Mathilde	Biologie végétale
M.	SARDA Louis	Biochimie
Mme	SIRUGUE Madeleine	Physique
M.	TACHOIRE Henri	Chimie

Maîtres de conférences

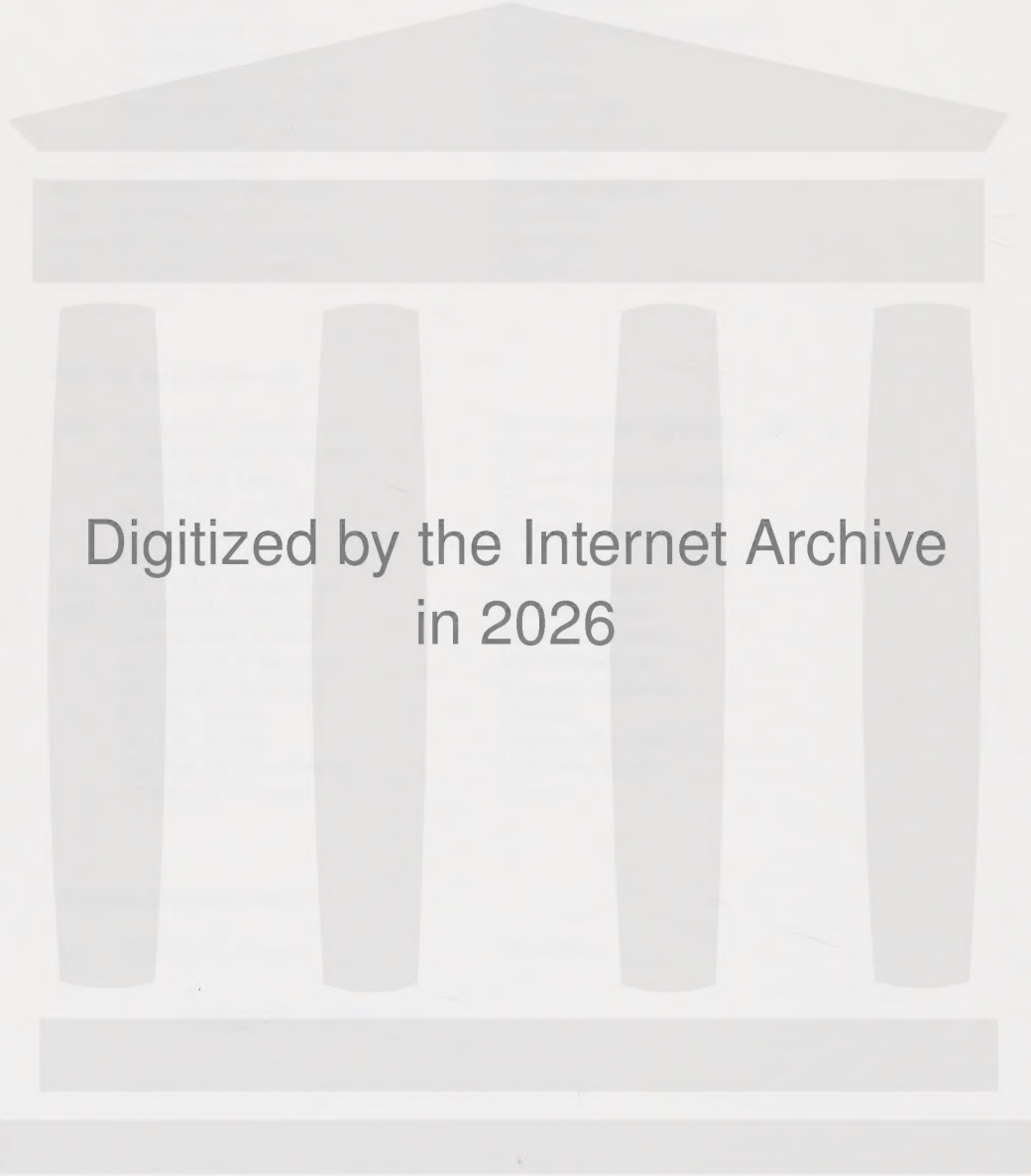
MM.	BELAICH Jean-Pierre	Microbiologie
	BENARROCHE Marcel	Physique
	BENLAIN David	Chimie de coordination
	CASALOT André	Chimie
	CRESP Jean	Biologie animale
	DELAAGE Michel	Biochimie
Mle	DETRAZ Jacqueline	Mathématiques
MM.	FARDOUX Gérard	Mathématiques
	LAVAGNE André	Biologie végétale
	MARTINET Bernard	Mathématiques
	MOULINS Maurice	Biologie végétale
	PUJOL Louis	Chimie
	PUJOL Rémy	Psycho-physiologie
	SOUBLIN Jean-Pierre	Mathématiques
	STREIFF Roland	Chimie

Chargés d'enseignement

M.	DELEUIL Roger	Physique
----	---------------	----------

A MA FEMME

A MES PARENTS



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41549012_0024

Qu'il me soit permis d'exprimer ma profonde gratitude envers Monsieur F.FER qui a bien voulu assumer la direction de mes recherches et dont l'aide constante m'a été si précieuse .

Que Monsieur T.VOGEL , qui n'a ménagé ni ses critiques ni ses conseils judicieux, et m'a fait l'honneur d'être membre du jury, trouve ici l'expression de ma profonde reconnaissance .

Je remercie Monsieur J.-M. SOURIAU , qui a bien voulu présider le jury, et Monsieur P. CASAL qui a accepté d'en faire partie, pour l'intérêt qu'ils ont porté à ce travail .

INTRODUCTION

Le but de ce travail est de montrer, à l'aide de la mécanique et de l'électromagnétisme classique, que l'évolution des systèmes électrisés, ensembles de particules ou milieux continus, n'est pas elle-même hamiltonienne, tout en s'insérant dans un formalisme hamiltonien plus large, et ceci à cause du retard de propagation des actions électromagnétiques, souvent négligé, mais dont nous tiendrons essentiellement compte ici .

Le problème physique qui a suscité cette étude est le suivant . On sait (voir les paradoxes de Loschmidt et de Zermelo (29), et, plus récemment F.Fer (8), que la mécanique hamiltonienne des ensembles de points matériels fournit une mécanique microscopique rendant difficilement compte, par les méthodes de la thermodynamique statistique, des propriétés macroscopiques des systèmes physiques en ce qui concerne le second principe et le problème lié de la stabilité . On est donc amené à *rechercher une mécanique plus générale* qui échappe à ces objections, en particulier *qui ne satisfasse plus aux conditions du théorème de Liouville* dans l'espace des phases, théorème de conservation qui est à la base des difficultés précédentes comme le montre par exemple le théorème de récurrence de Poincaré (22).

On connaît déjà en physique un exemple d'une telle mécanique : en effet, on admet généralement que le comportement d'une particule chargée soumise à des accélérations fortement variables est régi par l'équation dite de Lorentz (voir H. A.Lorentz (15) et l'ouvrage de H.Arzeliès (1) qui lui est consacré) :

$$m \vec{\gamma} = \vec{F}(\vec{x}, \vec{v}, t) + e \frac{d\vec{\gamma}}{dt}$$

$\vec{x}$ étant la position, $\vec{v}$ la vitesse, $\vec{\gamma}$ l'accélération de cette particule, ϵ un petit paramètre dont la valeur habituellement admise est $\epsilon = \frac{2}{3} \frac{e^2}{\epsilon_0 c^3}$, où e est la charge de la particule. Une telle évolution ne peut être hamiltonienne. Elle ne l'est certainement pas dans l'espace des $(\vec{x}, \vec{v})$, ni même dans celui des variables $(\vec{x}, \vec{v}, \vec{\gamma})$: en effet, la variation au cours du temps d'un volume V de cet espace est, comme on le démontre aisément :

$$\frac{1}{V} \frac{dV}{dt} = \frac{3}{\epsilon} m$$

valeur non nulle et constante, ce qui, outre le fait que $\vec{x}, \vec{v}, \vec{\gamma}$ ne sont pas des variables canoniques, montre que V croît indéfiniment avec t . Ceci entraîne que, quel que soit le changement de variables dont le jacobien reste fini, le volume garde cette propriété, liée d'ailleurs aux solutions "divergentes" (c'est à dire telles que l'accélération croisse indéfiniment avec le temps) bien connues de cette équation, et le mouvement ne peut donc être hamiltonien.

En analysant la démonstration originale de Lorentz, celle basée sur le développement de la force exercée par l'électron sur lui-même, (voir (15) p. 252), on voit que les deux hypothèses essentielles qui donnent à l'équation de Lorentz son caractère particulier, sont d'une part le fait que l'électron est représenté par un corps étendu (une sphère rigide en l'occurrence), d'autre part la prise en compte de l'action sur lui-même du champ électromagnétique retardé créé par l'électron. Ceci nous a donc amené à *étudier plus généralement les milieux étendus et chargés en tenant compte de leur propre champ électromagnétique interne retardé*.

Le premier chapitre sera consacré, en partant d'un exemple de fluide macroscopique assez général, le fluide relativiste holonome et barotrope, à exposer les rapports généraux du mouvement de tels milieux avec les systèmes hamiltoniens.

On sait en effet que certains fluides ont, s'ils sont neutres, ou, même s'ils sont chargés, mais dans le cas stationnaire, un mouvement hamiltonien. D'autre part, l'évolution d'un champ électromagnétique créé par une distribution de charges donnée est aussi hamiltonienne. On peut alors se demander, ce qui est l'un des points essentiels de cette étude, si, en toute généralité, *l'évolution conjointe de certains fluides électrisés et de leur propre champ électromagnétique (retardé bien sûr), en tenant compte de l'interaction entre ces deux systèmes, ne pourrait pas se déduire d'un même formalisme hamiltonien portant à la fois sur les deux ensembles de variables relatifs, l'un à la matière, l'autre au champ*.

Nous établirons effectivement cette propriété pour le fluide relativiste précédent en montrant qu'il existe une 2-forme différentielle extérieure de degré deux qui est invariante par les équations du mouvement de la matière et du champ . Par une démonstration indépendante, nous verrons ensuite qu'il est possible d'écrire ces équations sous forme canonique et donnerons l'hamiltonien puis le lagrangien et l'intégrale d'action correspondants .

On remarque alors que les expressions ainsi trouvées contiennent toutes des termes d'interaction entre la matière et le champ . De même que dans le cas des systèmes hamiltoniens traditionnels, il s'en suit que *l'évolution de la matière, considérée comme seule observable, évolution qui est la projection du mouvement dans l'espace des phases total sur celui du fluide, ne peut être hamiltonienne* . Ceci montre que les systèmes étendus et chargés sont bien du type plus général que nous recherchions .

En résolvant les équations d'évolution du champ (équations de Maxwell) par les formules des potentiels retardés, on s'aperçoit que l'on peut décrire le mouvement de la matière à l'aide d'équations ne faisant intervenir que les variables relatives à celle-ci, mais alors ces équations contiennent des intégrales portant sur tout le passé du système . *Le mouvement du fluide est donc héréditaire bien qu'il puisse être ramené à un formalisme hamiltonien, à condition de faire entrer les équations de Maxwell dans les équations d'évolution* .

Ceci conduit à soulever la question plus générale : *tout système héréditaire ne serait-il pas également susceptible d'être étudié à l'aide d'équations instantanées, mais à condition d'introduire un champ interne adéquat ?* Dans le chapitre II nous montrerons, en généralisant un théorème de T.Vogel (27) sur la réductibilité, que la réponse à cette question est positive . Il faut cependant noter que l'équivalence entre la mécanique héréditaire et celle qui fait intervenir des champs internes est, en général, purement mathématique car, pratiquement , seul le mouvement de la matière est observable et son comportement reste héréditaire . D'autre part, les équations instantanées qui régissent le champ sont généralement des équations aux dérivées partielles et le problème de la réductibilité à des équations différentielles ordinaires reste posé . Nous donnerons dans ce chapitre une condition nécessaire et suffisante pour qu'un système héréditaire soit ainsi réductible, ce qui montrera également qu'il existe bien des systèmes héréditaires ne pouvant être étudiés que

par la mécanique héréditaire ou par un ensemble d'équations instantanées comprenant nécessairement des équations aux dérivées partielles.

Après l'exposé de ces résultats généraux, les deux derniers chapitres seront consacrés à l'étude, à l'aide des méthodes précédentes de systèmes particuliers, déterminés par notre but premier : modifier la mécanique des corpuscules qui interviennent en thermodynamique statistique.

Dans le chapitre III, nous étudierons ainsi les milieux matériels que l'on considère dans l'interprétation "hydrodynamique" de la mécanique ondulatoire . On sait en effet que le modèle d'électron de Lorentz, qui nous a servi de point de départ, est sujet à de nombreuses critiques, par exemple l'existence à cette échelle de phénomènes quantiques ou bien l'incompatibilité de la rigidité avec la mécanique relativiste. Pour y échapper, on est amené à concevoir, en suivant l'interprétation "hydrodynamique" de la mécanique ondulatoire proposée par E.Madelung (16) et reprise par F.Fer (9), *une particule élémentaire comme un milieu matériel continu et déformable* (nous dirons pour abrégé fluide) qui, pour être décrit par exemple par l'équation de Schrödinger, est soumis en plus des forces habituelles, à celles dérivant du potentiel quantique de de Broglie (5). Lorsque le corpuscule est chargé, ce milieu obéit à une mécanique héréditaire à cause du retard de propagation du champ électromagnétique interne . Nous montrerons néanmoins, à l'aide de la méthode dégagée dans le premier chapitre, que ce mouvement est la projection sur l'espace des phases relatif au fluide seul, de l'évolution d'un système hamiltonien plus vaste, comprenant à la fois les variables relatives au fluide et celles décrivant le champ électromagnétique . Nous étendrons ces résultats, ainsi que l'interprétation hydrodynamique, aux équations de Pauli et de Klein-Gordon .

Enfin, comme dans certains cas les particules peuvent être raisonnablement décrites par le modèle d'électron de Lorentz qui apparaît alors comme un cas limite des milieux précédents, nous lui consacrerons le dernier chapitre . L'équation d'évolution correspondante sera celle qui se déduit des calculs originaux de Lorentz sans aucune approximation, ce qui fournit une équation héréditaire dont l'équation de Lorentz usuelle n'est qu'un développement limité aux premiers termes . On pourra ainsi voir de façon particulièrement claire l'équivalence entre les deux méthodes,

héréditaire et par champs internes, que nous lui appliquerons successivement .
D'autre part l'électron de Lorentz étant, comme nous le verrons un système fatal (voir T.Vogel (27)), l'espace des phases de la particule garde tout son intérêt et l'on peut se demander en liaison avec nos préoccupations de départ, quelle est l'évolution du volume dans cet espace . Nous répondrons par les deux méthodes à cette question en donnant une *expression de la variation du volume, non nulle* comme c'est d'ailleurs le cas en général pour tout système héréditaire .

C H A P I T R E I

MOUVEMENT D'UN FLUIDE RELATIVISTE CHARGÉ ET HOLONOME

Nous considérons ici un fluide chargé en relativité restreinte dont l'interaction avec le champ électromagnétique est prise sans aucune approximation . Dans le cas le plus général, ce champ est composé de deux parties : un champ électromagnétique externe supposé donné et le champ "interne", *retardé*, qui est créé par les charges du fluide . Ce dernier champ est d'ailleurs, sur le plan théorique, le seul indispensable : à condition d'englober dans le système étudié tous les corps agissant sur lui, ce qui est possible, le champ externe disparaît, seul subsistant le champ interne.

Le problème de l'étude du mouvement d'un tel système est évidemment très proche de celui d'un ensemble de charges ponctuelles en interaction par l'intermédiaire de leur champ électromagnétique retardé. On sait qu'en mécanique relativiste, il paraît difficile de mettre ce mouvement sous forme hamiltonienne . En effet, (voir J.-M. Souriau(24)) une simple extension du formalisme newtonien ne suffit pas pour obtenir ce résultat . Nous verrons à la fin de ce chapitre certaines raisons pour lesquelles nous pensons que ce formalisme échoue, ainsi d'ailleurs que la théorie de l'action à distance de Wheeler et Feynman (voir par exemple Rohrlich (23)) .

Une autre tentative a été faite (voir F.Rohrlich (23) p.188) en conservant toujours des particules ponctuelles mais en considérant le champ comme variable indépendante . Cependant dans ce cas, il est impossible d'échapper aux quantités infinies qui s'introduisent, par exemple dans le lagrangien, à cause de l'action du champ créé par une particule sur elle-même, si ce n'est en renonçant à toute description simple car il faut ajouter deux champs indépendants dont les infinis se détruisent et compléter les équations de conditions pour $t = \pm \infty$ qui font que le système d'équations d'évolution n'a plus la forme d'un système purement différentiel.

Le système plus général que nous étudions ici, milieu continu dans son propre champ retardé, permet d'échapper à ces difficultés, à condition de considérer le fluide et le champ qu'il crée comme décrits par deux ensembles de variables indépendantes . Il est alors possible de mettre le mouvement de l'ensemble sous forme hamiltonienne ou lagrangienne .

En effet, nous allons montrer d'une part que la mécanique hamiltonienne des milieux continus, connue depuis Volterra (voir par exemple P.Levy (13) et en formalisme moderne J.Marsden(17)) peut s'étendre au mouvements de certains fluides relativistes dont nous verrons dans ce chapitre un premier exemple, le fluide isotherme et holonome au sens de A.Lichnerowicz (14), généralisant le fluide barotrope de la mécanique newtonienne . On sait d'autre part que les équations de Maxwell d'un champ créé par un mouvement de charges donné peuvent se déduire d'un formalisme lagrangien (voir par exemple L.Landau et E.Lifchitz (12)) ou hamiltonien (voir W.K.H. Panofsky et M.Philipps (18)). En généralisant la propriété précédente des fluides relativistes et le formalisme hamiltonien du champ, nous pourrons montrer que le mouvement global du fluide en interaction avec son propre champ (et, éventuellement un autre champ imposé) est aussi hamiltonien .

Pour arriver à ce résultat, nous allons d'abord donner la formulation la plus générale du principe hamiltonien en montrant qu'il existe une forme différentielle extérieure de degré 2, d'un type légèrement plus général que celui employé habituellement depuis Cartan, qui est invariante par les équations d'évolution du fluide et du champ ^{en} interaction . Nous en déduirons alors l'élément d'invariant intégral au sens de Poincaré, qui lui correspond, puis, avec les variables canoniques ainsi trouvées, et en se plaçant dans un référentiel galiléen donné, un hamiltonien donnant les équations du mouvement dans ce référentiel . Ceci permettra alors de calculer le lagrangien dans ce même référentiel, puis l'intégrale d'action, qui, elle, a une expression covariante . Cette intégrale d'action contient comme cas particulier celle qui est bien connue pour le champ électromagnétique créé par une distribution de charges donnée .

Enfin, nous tirerons de ce formalisme quelques propriétés générales, en particulier sur le mouvement du fluide, considéré comme seul observable .

I . - DEFINITIONS ET NOTATIONS .

Nous nous plaçons ici en relativité restreinte ; les coordonnées d'univers sont x^ρ ($\rho = 0, 1, 2, 3$ ainsi que tout indice grec) telles que $x^1 = x$, $x^2 = y$, $x^3 = z$, $x^0 = t$ soit $x^\rho = (t, x^i)$ ($i = 1, 2, 3$ ainsi que tout indice latin) . La métrique est définie par le tenseur $g_{\rho\sigma}$ tel que l'on ait, dans tout repère galiléen orthonormé :

$$g_{\rho\sigma} x^\rho x^\sigma = x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2$$

A.- Variables de Lagrange .

Un milieu continu, qu'en toute généralité nous supposons déformable et auquel nous donnerons désormais le nom de fluide, est défini en variables de Lagrange par la donnée de la position $x^\rho(a^j)$ dans l'espace-temps de chacun de ses points, a^j , et d'une densité scalaire fixée $v_a(a^j)$, liée à la densité de masse propre par des formules que nous verrons plus loin*, telle que l'élément de masse correspondant aux points du fluide contenus dans l'élément de volume de l'espace des a^j $d^3 a = da^1 da^2 da^3$ soit $dv = v_a d^3 a$. La densité de charge sera de même $\rho_a(a^j)$ telle que l'élément de charge soit, dans les mêmes conditions, $\rho_a d^3 a$. Nous supposons la charge liée à la matière, donc ρ_a donnée une fois pour toutes.

Le mouvement du fluide est alors défini par l'ensemble des trajectoires de chacun de ses points, soit $x^\rho(a^j, \theta)$, θ paramètre temporel quelconque (par exemple le temps t d'un référentiel quelconque) . L'espace des mouvements est alors l'ensemble des applications $R^4 \rightarrow R^4 : (a^j, \theta) \mapsto x^\rho(a^j, \theta)$, formant une variété de dimension infinie . L'espace-temps de configuration est composé des fonctions $x^\rho(a^j)$ correspondant par exemple à une valeur $\theta = \theta_0$ donnée .

Les *mouvements variés* ou petits mouvements autour d'un mouvement du fluide sont les éléments de l'espace tangent à la variété des mouvements . Nous les noterons $\delta x^\rho(a^j, \theta)$, δ étant le déplacement élémentaire subi à l'instant θ par le point du fluide, a^j , à partir de la position $x^\rho(a^j, \theta)$; de même, nous noterons δ toute variation d'une grandeur liée au fluide et concernant un point a^j

* Voir la remarque suivant l'équation (11)

fixé de celui-ci . Cette définition entraîne que δ commute avec $\partial/\partial a^j$ et $\partial/\partial \theta$.

Si les variables de Lagrange permettent aisément la définition du mouvement du fluide en généralisant au cas continu le formalisme des ensembles de points matériels, leur maniement dans les calculs est rarement employé parce que moins commode que l'utilisation des variables d'Euler que nous adopterons désormais, sauf, parfois, pour éclairer la définition de certaines grandeurs ou pour raisonner sur l'espace des mouvements.

B.- Variables d'Euler .

Soit τ le temps propre au point $x^\rho(a^j, \theta)$ de la trajectoire du point a^j du fluide . La quadrivitesse $u^\rho(a^j, \theta)$ est définie par $u^\rho = \frac{dx^\rho}{d\tau}$, telle que $u_\rho u^\rho = -c^2$ puisque, par définition $c^2 d\tau^2 = -dx^\rho dx_\rho$. Posons

$$\dot{x}^\rho = \frac{\partial x^\rho(a^j, \theta)}{\partial \theta} \quad |\dot{x}| = (-\dot{x}^\rho \dot{x}_\rho)^{1/2}$$

il vient :

$$|\dot{x}| d\theta = c d\tau \quad \text{d'où} \quad \frac{d}{d\tau} = \frac{c}{|\dot{x}|} \frac{\partial}{\partial \theta}$$

Ceci permet de calculer u^ρ en fonction de $\dot{x}^\rho$, formule qui nous sera utile par la suite :

$$(1) \quad u^\rho = c \frac{\dot{x}^\rho}{|\dot{x}|}$$

En variables d'Euler, le mouvement du fluide est alors défini par la donnée de la densité propre de masse propre $\mu(x^\rho)$, telle que l'élément de masse propre soit $dm = \mu d\bar{\omega}_0$, $d\bar{\omega}_0$ étant l'élément de volume dans le référentiel propre au point x^ρ , et du champ des vitesses $u^\rho(x^\sigma)$. La densité propre de charge est $\rho(x^\sigma)$ et $j^\nu = \rho u^\nu$ est le quadrivecteur courant . Nous noterons $d/d\tau$ la dérivée fluide par rapport au temps propre, c'est à dire $u^\rho \partial_\rho$.

Un mouvement varié est alors défini par la donnée des déplacements $\delta x^\rho(x^\sigma)$ du point du fluide qui se trouvait en x^ρ et se trouve désormais en $x^\rho + \delta x^\rho(x^\sigma)$. Une grandeur ϕ quelconque, attachée au fluide, subit une variation $\delta\phi$ due à deux causes : d'une part le point où elle est calculée n'est

plus x^ρ mais $x^\rho + \delta x^\rho$, d'autre part comme, en général, sa valeur dépend de la position de tous les autres points du fluide, elle subit également, à x^ρ constants, une variation $\partial \phi$, dite "variation en place", qui est donc liée à la variation totale, $\delta \phi$, par

$$(2) \quad \delta \phi = \partial \phi + \partial_\rho \phi \delta x^\rho$$

La variation ∂ étant effectuée à x^ρ constants commute avec $\partial / \partial x^\rho$, de même que δ commutait avec $\partial / \partial x^j$.

Nous allons calculer immédiatement quelques formules donnant les variations de grandeurs importantes, qui nous seront utiles par la suite.

- Dérivées d'une fonction ϕ quelconque :

$$(3) \quad \delta (\partial_\rho \phi) = \partial_\rho \delta \phi - \partial_\sigma \phi \partial_\rho \delta x^\sigma$$

$$\text{En effet, } \delta (\partial_\rho \phi) = \partial (\partial_\rho \phi) + \partial_\sigma \partial_\rho \phi \delta x^\sigma$$

$$\partial_\rho (\delta \phi) = \partial_\rho (\partial \phi + \partial_\sigma \phi \delta x^\sigma) = \partial_\rho \partial \phi + \partial_\rho \partial_\sigma \phi \delta x^\sigma + \partial_\sigma \phi \partial_\rho \delta x^\sigma$$

$$\partial_\rho (\delta \phi) = \delta (\partial_\rho \phi) + \partial_\sigma \phi \partial_\rho \delta x^\sigma$$

- Vitesse d'univers u^ρ :

$$(4) \quad u^\rho = (g^{\rho\sigma} + \frac{u^\rho u^\sigma}{c^2}) \frac{d \delta x_\sigma}{d \tau}$$

En effet, en revenant aux variables de Lagrange et en utilisant la formule (1), il vient

$$\delta u^\rho = \delta \left(c \frac{\dot{x}^\rho}{|\dot{x}|} \right) = c \frac{\delta \dot{x}^\rho}{|\dot{x}|} - c \frac{\dot{x}^\rho}{|\dot{x}|^2} \delta |\dot{x}| = c \frac{\delta \dot{x}^\rho}{|\dot{x}|} + c \frac{\dot{x}^\rho}{|\dot{x}|^3} \dot{x}_\sigma \delta \dot{x}^\sigma$$

$$\text{puisque } \delta (|\dot{x}|) = \delta (-\dot{x}_\rho \dot{x}^\rho)^{1/2}$$

$$\text{Or } \delta \dot{x}^\rho = \delta \frac{\partial x^\rho}{\partial \theta} = \frac{\partial \delta x^\rho}{\partial \theta} = \frac{|\dot{x}|}{c} \frac{d \delta x^\rho}{d \tau} \quad . \text{ D'où}$$

$$\delta u^p = \frac{c}{|\dot{x}|} \frac{|\dot{x}|}{c} \frac{d \delta x^p}{d\tau} + c \frac{\dot{x}^p}{|\dot{x}|^3} \dot{x}^\sigma \frac{|\dot{x}|}{c} \frac{d \delta x_\sigma}{d\tau}$$

$$\delta u^p = \frac{d \delta x^p}{d\tau} + \frac{u^p u^\sigma}{c^2} \frac{d \delta x_\sigma}{d\tau}$$

On vérifie alors que l'on a bien $u_p \delta u^p = 0$.

- Élément de 3- surface dS_σ .

Considérons l'élément d'aire dS_σ d'une hypersurface de type espace, liée au fluide. C'est le vecteur polaire du tenseur complètement antisymétrique de rang 3, dont les 4 composantes strictes sont :

$$dS_0 = dx \wedge dy \wedge dz, \quad dS_1 = -dy \wedge dz \wedge dt, \quad dS_2 = -dz \wedge dx \wedge dt, \quad dS_3 = -dx \wedge dy \wedge dt$$

Dans une variation δx^p de chacun de ses points, l'hypersurface se déplace, ce qui entraîne une variation de son élément de surface qui vaut, si on la rapporte à l'ancien

$$(5) \quad \delta(dS_\sigma) = \partial_p \delta x^p dS_\sigma - \partial_\sigma \delta x^p dS_p$$

En effet, il suffit de remarquer que cela revient à paramétrer la nouvelle surface à l'aide de l'ancienne. On a ainsi :

$$dS_0 + \delta dS_0 = d(x + \delta x) \wedge d(y + \delta y) \wedge d(z + \delta z) = dx \wedge dy \wedge dz +$$

$$\partial_x \delta x dx \wedge dy \wedge dz + \partial_t \delta x dt \wedge dy \wedge dz + \partial_y \delta y dx \wedge dy \wedge dz +$$

$$\partial_t \delta y dx \wedge dt \wedge dz + \partial_z \delta z dx \wedge dy \wedge dz + \partial_t \delta z dx \wedge dy \wedge dt$$

soit

$$\delta(dS_0) = (\partial_x \delta x + \partial_y \delta y + \partial_z \delta z) dS_0 + \partial_t \delta x dy \wedge dz \wedge dt +$$

$$\partial_t \delta y dz \wedge dx \wedge dt + \partial_t \delta z dx \wedge dy \wedge dt$$

en ajoutant $\partial_t \delta t$ au premier terme et en le retranchant des autres, on a :

$$\delta(dS_0) = \partial_p \delta x^p dS_0 - \partial_0 \delta x^p dS_p$$

On peut aisément vérifier que les autres termes ont cette même forme .

C.- Champ électromagnétique .

Il est composé de deux parties : le champ électromagnétique "interne", créé par le fluide, et un champ externe, imposé .

Le champ interne est défini par son potentiel $A_\mu = (-\phi, \vec{A})$ en unités rationalisées, tel que le champ soit

$$(6) \quad F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \text{ ou encore } \vec{E} = - \text{grad } \phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \quad \vec{B} = \text{rot } \vec{A}$$

Le 4-potentiel est considéré ici comme une variable de configuration indépendante, au même titre que $x^p(\alpha^j)$. Il est donc susceptible de variations indépendantes que nous prendrons à x^p constants et noterons donc $\partial A_\mu(x^p)$, l'espace-temps jouant alors le rôle d'espace des variables de Lagrange pour le champ .

L'espace des mouvements du champ est alors l'ensemble des applications $R^4 \rightarrow R^4: x^p \mapsto A^\mu(x^p)$ et l'espace de configuration celui des applications $R^3 \rightarrow R^4: x^i \mapsto A^\mu(x^i)$, pour un temps t donné dans un référentiel quelconque, ou, plus généralement sur une hypersurface de type espace .

Le champ externe, imposé sera noté $F^{\mu\nu}$ et dérive par les mêmes formules du 4-potentiel $A_\mu = (-V, \vec{A})$. Il n'est pas naturellement pas susceptible de variations indépendantes .

II . - 2- FORME INVARIANTE DANS LE MOUVEMENT

A.- Equation d'évolution .

Le potentiel électromagnétique interne étant considéré comme une variable indépendante, il y a deux groupes d'équations d'évolution : les équations de la dynamique du fluide et les équations de Maxwell-Ampère du champ interne.

En suivant A. Lichnerowicz, (14), nous posons que le fluide est caracté-

risé par un tenseur d'impulsion-énergie symétrique $T^{\rho\sigma}$ de la forme :

$$(7) \quad T^{\rho\sigma} = r u^{\rho} u^{\sigma} - \Theta^{\rho\sigma} (r)$$

où r est un scalaire lié à la densité propre de masse propre*, et $\Theta^{\rho\sigma}$ le tenseur des contraintes, supposé ici fonction seulement de r (ou de μ). Le milieu étant holonome, on a par définition :

$$(8) \quad \partial_{\sigma} \Theta^{\rho\sigma} = -c^2 r \partial^{\rho} \log F$$

où F , scalaire, est appelé indice du milieu et est alors fonction de r .

Les équations d'évolution du fluide neutre sont alors $\partial_{\sigma} T^{\rho\sigma} = 0$. S'il est chargé, elles sont :

$$\partial_{\sigma} (r u^{\rho} u^{\sigma}) = \partial_{\sigma} \Theta^{\rho\sigma} + (F^{\rho\nu} + F^{\rho\nu}) j_{\nu}$$

les équations d'évolution du champ interne étant :

$$\partial_{\nu} F^{\mu\nu} = \mu_0 j^{\mu}$$

(μ_0 perméabilité magnétique).

Les équations d'évolution du système global, plongé dans le champ externe $F^{\mu\nu}$, imposé, sont :

$$(9) \quad \partial_{\sigma} (r u^{\rho} u^{\sigma}) = r c^2 \frac{\partial^{\rho} F}{F} + (F^{\rho\nu} + F^{\rho\nu}) j_{\nu}$$

$$(10) \quad \partial_{\nu} F^{\mu\nu} = \mu_0 j^{\mu}$$

On en tire, en multipliant (9) par u_{ρ} et en tenant compte de $u_{\rho} u^{\rho} = -c^2$, l'équation de conservation de la masse :

* dans le cas du fluide parfait il vaut par exemple $r = \mu + p / c^2$

$$(11) \quad \partial_{\sigma} \left(\frac{r u^{\sigma}}{F} \right) = 0$$

qui montre que, dans la définition en variables de Lagrange, il fallait poser, dS_{σ} étant l'élément de 3-surface définissant un tube de trajectoires, $\frac{r u^{\sigma}}{F} dS_{\sigma} = v_{\alpha} d^3a$, d^3a étant l'élément de volume dans l'espace des a^j correspondant à cet ensemble de trajectoires.

D'autre part, (10) nécessite la conservation de la charge

$$(12) \quad \partial_{\mu} j^{\mu} = 0$$

Comme $j^{\mu} = \rho u^{\mu}$ ceci entraîne que $\rho F / r$ est constant le long de toute ligne de courant⁽¹⁾, mais nous ne supposons pas, dans ce chapitre que cette constante soit la même dans tout le fluide.

B.- Mouvements variés.

En variable de Lagrange, pour définir un mouvement varié du fluide, il suffit de se donner les $\delta x^{\rho}(a^j, \theta)$. En variables d'Euler, une fois les $\delta x^{\rho}(x^{\sigma})$ données, il faut s'assurer que la densité généralisée de masse se conserve, de façon que les points du fluide se déplacent en gardant la même masse, pour qu'il s'agisse d'un mouvement varié du même fluide que celui du mouvement principal. L'équation de conservation de la masse dans le mouvement (11), montre qu'il faut poser, pour définir la variation de la masse due à la variation du mouvement $\delta x^{\rho}(x^{\sigma})$:

$$(13) \quad \delta \left(\frac{r}{F} u^{\rho} dS_{\rho} \right) = 0$$

sur toute hypersurface de type espace, liée au fluide. Ceci s'écrit, en utilisant (5) et (4)

$$(14) \quad \delta r - r \frac{\delta F}{F} + r \partial_{\lambda} \delta x^{\lambda} + r \frac{u^{\rho} u^{\sigma}}{c^2} \partial_{\sigma} \delta x_{\rho} = 0$$

(1) ceci est bien sûr en accord avec les définitions données en variables de Lagrange.

De même,, l'équation de conservation de la charge est :

$$(15) \quad \delta (\rho u^\sigma dS_\sigma) = 0$$

ou encore

$$(16) \quad \delta \rho + \rho \partial_\lambda \delta x^\lambda + \rho \frac{u^\rho u^\sigma}{c^2} \partial_\sigma \delta x^\rho = 0$$

On peut se demander quelles sont les variations indépendantes que l'on peut imposer à un instant donné, ou, plus généralement, sur toute hypersurface Σ de type espace, support des conditions initiales. Ce sont d'une part les variations des variables de configuration, δx^ρ et ∂A^μ , d'autre part, parmi leurs dérivées premières (les seules à prendre en considération car les équations (9) et (10) sont du second ordre), celles qui sont indépendantes, c'est à dire trois des δu^ρ , puisque $u_\rho \delta u^\rho = 0$, et trois des $\partial_\mu \partial A_\nu$ (par exemple $\partial F_{i0} = \partial E_i$) puisque les 16 $\partial_\mu \partial A_\nu$ sont liés par les 12 relations, si $x^\rho(b^i)$ est un paramétrage de Σ :

$$\frac{\partial \partial A^\nu}{\partial b^i} = \partial_\mu \partial A^\nu \frac{\partial x^\mu}{\partial b^i}$$

et qu'il doit subsister l'arbitraire de l'invariance de jauge qui permet, par exemple, de poser $\partial_\mu \partial A^\mu = 0$.

C.- *Forme différentielle invariante.*

Le théorème central de ce chapitre est le suivant.

a) *Théorème.* - Avec les notations précédentes, la 2-forme extérieure ω_Σ , où l'indice Σ signifie qu'elle est calculée sur l'hypersurface Σ , de type espace, d'élément d'aire dS_ρ .

$$(17) \quad \omega_\Sigma = \int_\Sigma \left\{ \delta(r u^\rho u^\sigma dS_\sigma) \wedge \delta x_\rho + c^2 r \frac{\partial F}{F} \wedge \delta x^\lambda dS_\lambda + \right. \\ \left. j^\sigma \delta(A^\rho + A^\rho) \wedge \delta x_\rho dS_\sigma - j_\sigma \partial A^\sigma \wedge \delta x^\rho dS_\rho + \frac{1}{\mu_0} \partial F^{\mu\nu} \wedge \partial A_\mu dS_\nu \right\}$$

est invariante par les équations d'évolution (9) et (10) . Cette invariance est caractérisée en particulier par le fait que l'on a, pour toute hypersurface Σ' de type espace et pour les deux mêmes mouvements variés δ_1 et δ_2

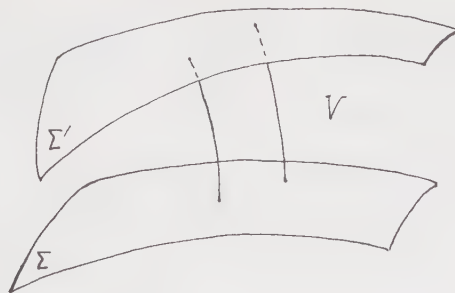
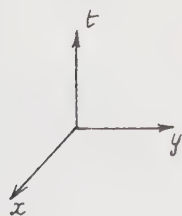
$$(18) \quad \omega_{\Sigma} (\delta_1, \delta_2) = \omega_{\Sigma'} (\delta_1, \delta_2)$$

Cette dernière égalité montre que la valeur de ω ne dépend que des trois mouvements considérés : le mouvement principal et les deux mouvements variés (infinitésimalement voisins) comme l'exige la définition de l'invariance telle que la donne Cartan (6) . Il est à noter que cette définition est légèrement plus générale que celle employée habituellement, car, conformément aux idées de la relativité, les différents points du système ne sont pas nécessairement considérés ici simultanément puisque Σ est quelconque et non restreinte à un hyperplan $t = \text{constante}$.

Démonstration . On voit immédiatement que ω_{Σ} est bien une 2-forme sur l'espace des mouvements : elle est en effet une forme bilinéaire sur l'espace tangent d'après la définition des variations donnée plus haut et elle est bien antisymétrique, à cause des produits extérieurs qui y figurent .

Pour démontrer la condition (18), nous ferons un abus de notations en notant encore $\delta a \wedge \delta b$ la valeur de cette forme pour deux petits mouvements δ_1 et δ_2 donnés, c'est à dire en écrivant $\delta a \wedge \delta b$ au lieu de $\delta_1 a \delta_2 b - \delta_2 a \delta_1 b$; ces deux variations obéissent naturellement aux équations aux variations déduites des équations d'évolution (9) et (10) .

Nous allons ainsi calculer $(\omega_{\Sigma} - \omega_{\Sigma'}) (\delta_1, \delta_2)$ en appliquant le théorème de Stokes et montrer que, compte tenu des équations des petits mouvements ceci est nul . On a, en désignant par V le quadrivolume compris entre Σ et Σ' et s'étendant jusqu'à l'infini (nous supposons que, grâce aux densités de masse et de charge, les sommes sur la surface de l'infini sont nulles et que toutes les intégrales de volume sont convergentes) :



$$\begin{aligned}
 \omega_{\Sigma} - \omega_{\Sigma'} &= \int_V \left\{ \partial_{\sigma} \{ \delta(r u^{\rho} u^{\sigma}) \delta x_{\rho} \} + \partial_{\sigma} \{ r u^{\rho} u^{\sigma} \partial_{\lambda} \delta x^{\lambda} \delta x_{\rho} \} \right. \\
 &\quad \left. \partial_{\lambda} (r u^{\rho} u^{\sigma} \partial_{\sigma} \delta x^{\lambda} \delta x_{\rho}) + \partial_{\lambda} (c^2 r \frac{\partial F}{F} \wedge \delta x^{\lambda}) + \right. \\
 &\quad \left. \partial_{\sigma} \{ j^{\sigma} \delta(A^{\rho} + A^{\rho}) \wedge \delta x_{\rho} \} - \partial_{\rho} (j^{\sigma} \partial A_{\sigma} \wedge \delta x^{\rho}) + \right. \\
 &\quad \left. \frac{1}{\mu_0} \partial_{\nu} (\partial F^{\mu\nu} \wedge \partial A_{\mu}) \right\} \quad (2) \\
 \omega_{\Sigma} - \omega_{\Sigma'} &= \int_V \left\{ \partial_{\sigma} \delta(r u^{\rho} u^{\sigma}) \wedge \delta x_{\rho} + \delta(r u^{\rho} u^{\sigma}) \wedge \partial_{\sigma} \delta x_{\rho} + \right. \\
 &\quad \partial_{\sigma} (r u^{\rho} u^{\sigma}) \partial_{\lambda} \delta x^{\lambda} \delta x_{\rho} + r u^{\rho} u^{\sigma} \partial_{\sigma} \partial_{\lambda} \delta x^{\lambda} \delta x_{\rho} + \\
 &\quad r u^{\rho} u^{\sigma} \partial_{\lambda} \delta x^{\lambda} \partial_{\sigma} \delta x_{\rho} - \partial_{\lambda} (r u^{\rho} u^{\sigma}) \partial_{\sigma} \delta x^{\lambda} \delta x_{\rho} - \\
 &\quad - r u^{\rho} u^{\sigma} \partial_{\lambda} \partial_{\sigma} \delta x^{\lambda} \delta x_{\rho} - r u^{\rho} u^{\sigma} \partial_{\sigma} \delta x^{\lambda} \wedge \partial_{\lambda} \delta x_{\rho} + \\
 &\quad \partial_{\lambda} (c^2 r \frac{\partial F}{F}) \wedge \delta x^{\lambda} + c^2 r \frac{\partial F}{F} \wedge \partial_{\lambda} \delta x^{\lambda} + j^{\sigma} \partial_{\sigma} \delta(A^{\rho} + A^{\rho}) \wedge \delta x_{\rho} \\
 &\quad + j^{\sigma} \delta(A^{\rho} + A^{\rho}) \wedge \partial_{\sigma} \delta x_{\rho} - \partial_{\rho} (j^{\sigma} \partial A_{\sigma} \wedge \delta x^{\rho}) + \frac{1}{\mu_0} \partial_{\nu} \partial F^{\mu\nu} \wedge \partial A_{\mu} \\
 &\quad \left. + \frac{1}{\mu_0} \partial F^{\mu\nu} \wedge \partial_{\nu} \partial A_{\mu} \right\}
 \end{aligned}$$

où l'on a déjà tenu compte de $\partial_{\sigma} j^{\sigma} = 0$. Nous allons montrer que la quantité sous le signe somme est nulle. On a déjà $(4) + (7) = 0$. D'après (3)

$$(7) + (6) = \delta \partial_{\sigma} (r u^{\rho} u^{\sigma}) \wedge \delta x_{\rho} + \partial_{\lambda} (r u^{\rho} u^{\sigma}) \partial_{\sigma} \delta x^{\lambda} \delta x_{\rho} - \partial_{\lambda} (r u^{\rho} u^{\sigma}) \partial_{\sigma} \delta x^{\lambda} \wedge \delta x_{\rho}$$

et en tenant compte de l'équation d'évolution (9) :

$$(7) + (6) = \left\{ \delta \left(-c^2 r \frac{\partial^{\rho} F}{F} \right) + \delta \left((F^{\rho\nu} + F^{\nu\rho}) j_{\nu} \right) \right\} \wedge \delta x_{\rho} = (16) + (17)$$

Le terme suivant, (2), vaut :

$$(2) = \delta r \wedge u^{\rho} u^{\sigma} \partial_{\sigma} \delta x_{\rho} + r \delta u^{\rho} \wedge u^{\sigma} \partial_{\sigma} \delta x_{\rho} + r u^{\rho} \delta u^{\sigma} \wedge \partial_{\sigma} \delta x_{\rho} = (18) + (19) + (20)$$

or (19) = 0 par symétrie puisqu'il vaut $r(g^{\rho\lambda} + \frac{u^\rho u^\lambda}{c^2}) \frac{d\delta x_\lambda}{d\tau} \wedge \frac{d\delta x_\rho}{d\tau}$.

$$(20) + (8) = r u^\rho u^\lambda \partial_\lambda \delta x^\sigma \wedge \partial_\sigma \delta x_\rho + r u^\rho u^\sigma u^\lambda u^\alpha \partial_\alpha \delta x_\lambda \wedge \partial_\sigma \delta x_\rho - r u^\rho u^\sigma \partial_\sigma \delta x^\lambda \wedge \partial_\lambda \delta x_\rho$$

en utilisant (4). Or les deux termes extrêmes s'annulent, et celui du milieu est nul par symétrie. Donc, (20) + (8) = 0.

$$(3) = -c^2 r \partial_\lambda \delta x^\lambda \wedge \frac{\partial^\rho F}{F} \delta x_\rho + (F^{\rho\nu} + F^{\nu\rho}) j_\nu \partial_\lambda \delta x^\lambda \wedge \delta x_\rho = (21) + (22)$$

d'après (9). Grâce à (14), on peut récrire (5) et on a :

$$\begin{aligned} (5) + (18) + (10) + (21) &= -c^2 \partial_\lambda \delta x^\lambda \wedge (\delta r - r \frac{\delta F}{F} + r \partial_\alpha \delta x^\alpha) + \delta r \wedge u^\rho u^\sigma \partial_\sigma \delta x_\rho \\ &\quad + c^2 r \frac{\partial F}{F} \partial_\lambda \delta x^\lambda - c^2 r \partial_\lambda \delta x^\lambda \wedge \frac{\partial^\rho F}{F} \delta x_\rho \\ &= c^2 \delta r \wedge \partial_\lambda \delta x^\lambda - c^2 r \frac{\delta F}{F} \wedge \partial_\lambda \delta x^\lambda + \delta r \wedge u^\rho u^\sigma \partial_\sigma \delta x_\rho + c^2 r \frac{\delta F}{F} \wedge \partial_\lambda \delta x^\lambda \\ &= \delta r \wedge (c^2 \partial_\lambda \delta x^\lambda + u^\rho u^\sigma \partial_\sigma \delta x_\rho) = 0 \end{aligned}$$

eu égard à (14) et en remarquant que $\delta F = F'(r) \delta r$.

$$(9) + (16) = \partial_\lambda (c^2 r \frac{\partial F}{F}) \wedge \delta x^\lambda + \delta (-c^2 r \frac{\partial^\rho F}{F}) \wedge \delta x_\rho$$

mais, comme F est fonction de r seul, si l'on pose $G' = c^2 r \frac{F'}{F}$ on a :

$$\begin{aligned} (9) + (16) &= \partial_\lambda (G' \partial r) \wedge \delta x^\lambda - \delta (G' \partial^\rho r) \wedge \delta x_\rho = \partial_\lambda \partial G \wedge \delta x^\lambda - \delta (\partial^\rho G) \wedge \delta x_\rho \\ &= \partial (\partial_\lambda G) \wedge \delta x^\lambda - \partial (\partial_\rho G) \wedge \delta x^\rho - \partial_\sigma \partial^\rho G \delta x^\sigma \wedge \delta x_\rho = 0 \end{aligned}$$

et l'on voit qu'il ne reste plus à considérer que les termes contenant les champs. Remarquons d'abord que (15) est nul par symétrie :

$$\begin{aligned} (15) &= \frac{1}{\mu_0} \partial^\mu \partial A^\nu \wedge \partial_\nu \partial A_\mu - \frac{1}{\mu_0} \partial^\nu \partial A^\mu \wedge \partial_\nu \partial A_\mu = \frac{1}{2\mu_0} (\partial^\mu \partial A^\nu \wedge \partial_\nu \partial A_\mu + \partial^\nu \partial A^\mu \wedge \partial_\mu \partial A_\nu) \\ &= \frac{1}{2\mu_0} (\partial^\mu \partial A^\nu \wedge \partial_\nu \partial A_\mu - \partial_\mu \partial A_\nu \wedge \partial^\nu \partial A^\mu) = 0 \end{aligned}$$

D'autre part

$$\begin{aligned} (11) + (12) + (17) + (22) = & j^\sigma \partial_\sigma \delta(A^\rho + A^\rho) \wedge \delta x_\rho + j^\sigma \delta(A^\rho + A^\rho) \wedge \partial_\sigma \delta x_\rho \\ & + \delta\{(F^{\rho\nu} + F^{\rho\nu}) j_\nu\} \wedge \delta x_\rho + (F^{\rho\nu} + F^{\rho\nu}) j_\nu \partial_\lambda \delta x^\lambda \wedge \delta x_\rho \end{aligned}$$

En écrivant, pour un instant $\bar{A}_\mu$ et $\bar{F}^{\mu\nu}$ au lieu de $(A^\mu + A^\mu)$ et $(F^{\mu\nu} + F^{\mu\nu})$

$$\begin{aligned} (11) + (12) + (17) + (22) = & j^\sigma \partial_\sigma \partial \bar{A}^\rho \wedge \delta x_\rho + j^\sigma \partial_\sigma \partial_\lambda \bar{A}^\rho \delta x^\lambda \wedge \delta x_\rho + j^\sigma \partial_\lambda \bar{A}^\rho \partial_\sigma \delta x^\lambda \wedge \delta x_\rho \\ & + j^\sigma \partial \bar{A}^\rho \wedge \partial_\sigma \delta x_\rho + j^\sigma \partial_\lambda \bar{A}^\rho \delta x^\lambda \wedge \partial_\sigma \delta x_\rho + \partial \bar{F}^{\rho\nu} j_\nu \wedge \delta x_\rho \\ & + \bar{F}^{\rho\nu} j^\lambda \partial_\lambda \delta x_\nu \wedge \delta x_\rho - \bar{F}^{\rho\nu} j_\nu \partial_\lambda \delta x^\lambda \wedge \delta x^\rho + \\ & \partial_\lambda \bar{F}^{\rho\nu} j_\nu \delta x^\lambda \wedge \delta x_\rho + \bar{F}^{\rho\nu} j_\nu \partial_\lambda \delta x^\lambda \wedge \delta x^\rho \end{aligned}$$

grâce à

$$(19) \quad \delta j_\nu = j^\lambda \partial_\lambda \delta x_\nu - j_\nu \partial_\lambda \delta x^\lambda$$

que l'on peut aisément démontrer à partir de $j_\nu = \rho u_\nu$, de l'équation de conservation de la charge (16) et de (4). Les 3° 5° et 7° termes donnent en changeant le nom des indices :

$$j^\sigma \partial_\lambda \bar{A}^\rho \partial_\sigma \delta x^\lambda \wedge \delta x_\rho - j^\sigma \partial_\rho \bar{A}^\lambda \partial_\sigma \delta x_\lambda \wedge \delta x^\rho + \bar{F}^{\rho\lambda} j^\sigma \partial_\sigma \delta x_\lambda \wedge \delta x_\rho = 0$$

Les 8° et 10° termes s'annulent également, et le 9° donne :

$$\partial_\lambda \partial^\rho \bar{A}^\nu j_\nu \delta x^\lambda \wedge \delta x_\rho - \partial_\lambda \partial^\nu \bar{A}^\rho j_\nu \delta x^\lambda \wedge \delta x_\rho = - \partial_\lambda \partial^\nu \bar{A}^\rho j_\nu \delta x^\lambda \wedge \delta x_\rho$$

de sorte qu'il s'annule avec le deuxième, si bien que

$$\begin{aligned}
 (11) + (12) + (17) + (22) &= j^\sigma \partial_\sigma \bar{A}^\rho \wedge \delta x^\rho + j^\sigma \partial \bar{A}^\rho \wedge \partial_\sigma \delta x_\rho + \partial \bar{F}^{\rho\nu} j_\nu \wedge \delta x_\rho \\
 &= j^\sigma \partial_\sigma \bar{A}^\rho \wedge \delta x_\rho + j^\sigma \partial \bar{A}^\rho \wedge \partial_\sigma \delta x_\rho + \partial \bar{A}^\rho j_\nu \wedge \delta x_\rho - \partial \bar{A}^\rho j_\nu \wedge \delta x_\rho \\
 &= j^\sigma \partial \bar{A}^\rho \wedge \partial_\sigma \delta x_\rho + \partial \bar{A}^\rho j_\nu \wedge \delta x_\rho = j^\sigma \partial A^\rho \wedge \partial_\sigma \delta x_\rho + \partial \bar{A}^\rho j_\nu \wedge \delta x_\rho
 \end{aligned}$$

Si l'on ajoute les termes restant, (13) et (14), et si l'on tient compte, dans (14) des variations des équations de Maxwell (10), on a :

$$\begin{aligned}
 \omega_\Sigma - \omega_{\Sigma'} &= (11) + (12) + (17) + (22) + (13) + (14) = j^\sigma \partial A^\rho \wedge \partial_\sigma \delta x_\rho + \\
 &\quad \partial \bar{A}^\rho j_\nu \wedge \delta x_\rho - \partial_\rho \partial A_\sigma j^\sigma \wedge \delta x^\rho - \partial A_\sigma \wedge \partial_\rho (j^\sigma \delta x^\rho) + \\
 &\quad j^\lambda \partial_\lambda \delta x^\mu \wedge \partial A_\mu - j^\mu \partial_\lambda \delta x^\lambda \wedge \partial A_\mu - \partial_\lambda j^\mu \delta x^\lambda \wedge \partial A_\mu
 \end{aligned}$$

en se servant de l'expression (19) de δj^ν et de (2) .. On voit alors que les 2° et 3° termes s'annulent réciproquement, que la somme des 4°, 5°, et 6° terme est nulle ainsi que celle des 1° et 5°. On a donc

$$\omega_\Sigma = \omega_{\Sigma'} \quad \forall \Sigma, \Sigma'$$

C.Q.F.D.

b) - Expressions particulières de la 2-forme

Considérons, pour faciliter l'interprétation des différents termes de (17), le cas où Σ est en fait un hyperplan défini par $t = c \frac{t^e}{c}$ dans le référentiel galiléen donné. Sur ce plan, Π , on a donc $dx^0 = dt = 0$ d'où $dS_\rho = (d\bar{w}, 0, 0, 0)$, $d\bar{w} = dx dy dz$. On trouve :

$$\begin{aligned}
 (20) \quad \omega_\Pi &= \int_R \left(\delta(r u^\rho u^\sigma d\bar{w}) \wedge \delta x_\rho + c^2 r \frac{\partial F}{\partial t} \wedge \delta t d\bar{w} + \rho u^\sigma \delta(A^\rho + A^\rho) \wedge \right. \\
 &\quad \left. \delta x_\rho d\bar{w} - j^\sigma \partial A_\sigma \wedge \delta t d\bar{w} + \frac{1}{\mu_0} \partial F^{\mu\nu} \wedge \partial A_\mu d\bar{w} \right)
 \end{aligned}$$

Les termes de matière ont une interprétation simple : le premier est le produit extérieur de l'impulsion par le déplacement, le second de l'énergie de contrainte par le temps, le troisième est le terme complémentaire habituel lorsqu'on considère des charges en mouvement dans un champ électromagnétique . Le dernier terme est aussi facile à interpréter : c'est le produit extérieur des deux ensembles de variables électromagnétiques $\vec{D}$ et $\vec{A}$, dont on sait qu'elles sont conjuguées (voir W.K.H. Panofsky et M.Philipps (18)). Tous ces termes sont des formes fermées . Seul le quatrième terme échappe à ces considérations et semble refléter l'interaction champ-matière, sous une forme suffisante pour assurer l'invariance de ω_Σ mais peut-être pas assez pour que cette 2-forme soit complète au sens de Cartan, y compris pour le champ interne (car elle l'est pour les termes correspondant au mouvement de la matière dans le champ extérieur).

Si l'on considère la 2-forme induite lorsque $\delta t = 0$, c'est à dire l'élément d'invariant intégral au sens de Poincaré, on obtient la 2-forme présymplectique :

$$\beta = \int_{R^3} \left(\delta(r u^i u^0 d\bar{\omega}) \wedge \delta x_i + \rho u^0 \delta(A^i + A_i) \wedge \delta x_i d\bar{\omega} + \frac{1}{\mu_0} \partial F^{i0} \wedge \partial A_i d\bar{\omega} \right)$$

soit , en introduisant la vitesse $v^i = u^i/u^0$ dans le référentiel considéré, et l'induction électrique $D^i = \epsilon_0 E^i$:

$$(21) \quad \beta = \int_{R^3} \delta \left[\left(r (u^0)^2 v_i + \rho u^0 (A_i + A_i) \right) d\bar{\omega} \right] \wedge \delta x^i - \int_{R^3} \partial D_i \wedge \partial A^i d\bar{\omega}$$

On voit que β a la forme canonique d'une somme de produits extérieurs de deux différentielles, ce qui entraîne $d\beta = 0$ et permet de prévoir les variables canoniques du formalisme hamiltonien correspondant, avec une légère particularité, due au fait que ϕ n'a pas de variable conjuguée, ce qui est normal puisque les équations de Maxwell-Ampère ne font pas intervenir la dérivée seconde de ϕ par rapport au temps mais seulement sa dérivée première .

III .- HAMILTONIEN ET LAGRANGIEN

A.-Hamiltonien dans un référentiel donné .

Nous allons d'abord récrire les équations d'évolution (9), (10) en formalisme tridimensionnel dans le référentiel donné et ce sont ces équations que nous retrouverons à partir d'un formalisme hamiltonien .

Partons de (9) ; en tenant compte de (11) qui s'écrit :

$$\frac{1}{F} \partial_{\sigma} (r u^{\sigma}) - r u^{\sigma} \frac{\partial_{\sigma} F}{F^2} = 0 ,$$

il vient, pour les trois premières composantes de (9) :

$$r u^{\sigma} \partial_{\sigma} u^i + u^i \partial_{\sigma} (r u^{\sigma}) = - c^2 r \frac{\partial^i F}{F} + (F^{i\nu} + F^{\nu i}) j_{\nu}$$

$$r u^{\sigma} \partial_{\sigma} u^i + u^i r u^{\sigma} \frac{\partial_{\sigma} F}{F} = - c^2 r \frac{\partial^i F}{F} + (F^{i\nu} + F^{\nu i}) j_{\nu}$$

$$\frac{r u^{\sigma}}{F} \partial_{\sigma} (F u^i) = - c^2 r \frac{\partial^i F}{F} + (F^{i\nu} + F^{\nu i}) j_{\nu}$$

or $u^{\sigma} \partial_{\sigma} = d/d\tau$ (τ temps propre) et $\frac{d}{d\tau} = u^0 \frac{d}{dt}$ d'où les équations du mouvement du fluide, en remplaçant $F^{i\nu}$ par $\vec{E}$ et $\vec{B}$:

$$(22) \quad \frac{r u^0}{F} \frac{d(F u^i)}{dt} = - c^2 r \frac{\partial^i F}{F} + \rho u^0 (E^i + E^i) + \rho u^0 \left[\vec{v} \wedge (\vec{B} + \vec{B}) \right]^i$$

Les équations d'évolution du champ sont les équations de Maxwell Ampère ($\vec{j} = (j^i) = \rho u^0 \vec{v}$) seules utiles puisque $\vec{D}$ et $\vec{H}$ sont exprimés en fonction des potentiels

$$(23) \quad \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = - \vec{j} + \text{rot } \vec{H} , \quad \text{div } \vec{D} = \rho u^0$$

Les équations de conservation de la masse et de la charge (11) et (12) deviennent, puisque $dS_p = (d\bar{\omega}, 0, 0, 0)$:

$$(24) \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{r u^0}{F} d\bar{\omega} \right) = 0 , \quad \frac{d}{dt} (\rho u^0 d\bar{\omega}) = 0$$

Nous poserons de même, dans les variations du mouvement :

$$(25) \quad \delta \left(\frac{r u^0}{F} d\bar{\omega} \right) = 0, \quad \delta \left(\rho u^0 d\bar{\omega} \right) = 0$$

On a alors le résultat suivant :

En variables conjuguées formées par les variables de configuration définies précédemment, $x^i(a^j)$, $A^i(x^j)$, et les densités volumiques de moments conjugués

$$(26) \quad \begin{cases} p^i = r u^0 u^i + \rho u^0 (A^i + A^i) & \text{pour le fluide} \\ -D^i = -\epsilon_0 E^i & \text{pour le potentiel vecteur} \end{cases}$$

les équations d'évolution (22) et (23) peuvent se déduire de l'hamiltonien

$$(27) \quad H = \int r (u^0)^2 c^2 d\bar{\omega} - \int G d\bar{\omega} + \int \rho u^0 (\phi + V) d\bar{\omega} + \int \left(\frac{D^2}{2\epsilon_0} + \frac{(\text{rot} \vec{A})^2}{2\mu_0} + \vec{D} \cdot \text{grad} \phi \right) d\bar{\omega}$$

(où $G' = c^2 r F'(r)/F$, d'où G par intégration).

Pour faciliter l'écriture et rendre compte du cas particulier présenté par ϕ , nous écrirons les équations d'Hamilton sous la forme d'une seule égalité entre différentielles :

$$(28) \quad \delta H = \int \left(\delta(p_i d\bar{\omega}) v^i - \frac{d}{dt} (p_i d\bar{\omega}) \delta x^i \right) + \int \left(-\partial \vec{D} \cdot \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot \partial \vec{A} \right) d\bar{\omega}$$

qui reprend dans le cas continu et lorsque t est considéré comme non sujet à variations, un formalisme déjà utilisé pour les systèmes à nombre fini de variables (voir J.-M. Souriau (24)).

Démonstration : la forme précédente des équations canoniques permet de faire le calcul avec les variables indépendantes les plus commodes ; au lieu de p^i nous prendrons Fu^i dont le lien avec p^i sera par définition (26). Dans ce cas les équations devront donner son lien avec $dx^i/dt = v^i$ c'est à dire $u^i = u^0 v^i$ (où, par définition $u^0 = (1 + u^2/c^2)^{1/2}$).

Calculons δH à partir de (27) :

$$\delta H = \int \frac{r u^0}{F} c^2 d\bar{\omega} \delta(Fu^0) - \int G' \delta r d\bar{\omega} + \int \rho u^0 \delta(\phi + V) d\bar{\omega} + \int \left[\frac{2 \vec{D} \cdot \partial \vec{D}}{2\epsilon_0} + \frac{\partial (\text{rot} \vec{A})^2}{2\mu_0} + \partial (\vec{D} \cdot \text{grad} \phi) \right] d\bar{\omega}$$

en utilisant les équations de conservation (25) . Or $u^0 = (1+u^2/c^2)^{1/2}$ d'où :

$$\delta(F u^0) = u^0 \delta F + \frac{F}{u^0 c^2} \vec{u} \cdot \delta \vec{u}$$

d'autre part, si $\vec{H} = \text{rot } \vec{A} / \mu_0$

$$\frac{\partial (\text{rot } \vec{A})^2}{2 \mu_0} = \frac{\text{rot } \vec{A} \cdot \text{rot } \partial \vec{A}}{\mu_0} = \vec{H} \cdot \text{rot } \partial \vec{A}$$

d'où, en intégrant par parties ($\vec{A}$ étant nul à l'infini) :

$$\int \frac{\partial (\text{rot } \vec{A})^2}{2 \mu_0} d\omega = \int \vec{H} \cdot \text{rot } \partial \vec{A} d\omega = \int \text{rot } \vec{H} \cdot \partial \vec{A} d\omega$$

On a donc, en revenant à la définition de G et en posant $\epsilon_0 \vec{E} = \vec{D}$

$$\begin{aligned} \delta H = & \int \frac{ru^0}{F} u^0 c^2 \delta F d\omega + \int \frac{ru^0}{F} c^2 \frac{F}{u^0 c^2} \vec{u} \cdot \delta \vec{u} d\omega - \int rc^2 \frac{\partial F}{F} d\omega \\ & + \int \rho u^0 \partial_i (\phi + V) \delta x^i d\omega + \int \rho u^0 \partial \phi d\omega + \int \vec{E} \cdot \partial \vec{D} d\omega \\ & + \int \text{rot } \vec{H} \cdot \partial \vec{A} d\omega + \int g \vec{r} \partial \phi \cdot \partial \vec{D} d\omega + \int \vec{D} \cdot g \vec{r} \partial \phi d\omega \end{aligned}$$

d'où, après quelques intégrations par parties et en y remplaçant encore u^0 par sa valeur :

$$\begin{aligned} \delta H = & \int \frac{ru^i}{F} \delta(Fu_i) d\omega + \int rc^2 \frac{\partial_i F}{F} \delta x^i d\omega + \int \rho u^0 \partial_i (\phi + V) \delta x^i d\omega \\ & + \int \rho u^0 \partial \phi d\omega + \int \left(\vec{E} \cdot \partial \vec{D} + \text{rot } \vec{H} \cdot \partial \vec{A} + g \vec{r} \partial \phi \cdot \partial \vec{D} - \text{div } \vec{D} \partial \phi \right) d\omega \end{aligned}$$

D'autre part, les équations hamiltoniennes du mouvement résumées en (28) s'écrivent :

$$\begin{aligned} \delta H = & \int \left\{ \frac{ru^0}{F} d\omega \delta(Fu^i) + \rho u^0 d\omega \partial_j (A^i + A^i) \delta x^j + \rho u^0 d\omega \partial A^i \right\} v_i \\ & - \int \left\{ \frac{ru^0}{F} d\omega \frac{d(Fu^i)}{dt} + \rho u^0 d\omega \partial_j (A^i + A^i) v^j + \rho u^0 d\omega \left(\frac{\partial A_i}{\partial t} + \frac{\partial A_i}{\partial t} \right) \right\} \delta x^i \\ & - \int \partial \vec{D} \cdot \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} d\omega + \int \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot \partial \vec{A} d\omega \end{aligned}$$

En identifiant ces deux valeurs de δH on trouve bien, pour $\delta (Fu^i)$ la relation de définition de u^i : $u^i = u^0 v^i$, pour $\partial \vec{D}$ la relation de définition de $\vec{D}$ (ou $\vec{E}$) en fonction des variables de configuration que sont les potentiels $\vec{A}, \phi, \vec{E} = -g\vec{r} \vec{a} d\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$. Enfin, le coefficient de δx^i correspond à l'équation du mouvement (22), ceux de $\partial \vec{A}$ et $\partial \phi$, respectivement aux équations (23) de Maxwell-Ampère.

C.Q.F.D.

Les théorèmes généraux de la mécanique hamiltonienne montrent alors que la 2-forme

$$\int \delta (p_i d\bar{w}) \wedge \delta x^i + \int - \partial D_i \wedge \partial A^i d\bar{w}$$

est invariante dans le mouvement. On constate à l'aide des définitions (26) qu'elle coïncide bien avec (21).

Enfin, on démontre aisément, à partir de l'expression (27) de H et en tenant compte de $\text{div} \vec{D} = \rho u^0$, que la valeur de l'hamiltonien est bien l'énergie totale du système dans le référentiel considéré :

$$(29) \quad H = \int r(u^0)^2 c^2 d\bar{w} + \int \rho u^0 V d\bar{w} - \int G d\bar{w} + \int \frac{\epsilon_0 \vec{E}^2 + \mu_0 \vec{H}^2}{2} d\bar{w}$$

qui est une constante du mouvement dès que $\partial V / \partial t = 0$.

B.-Lagrangien

Le lagrangien correspondant, toujours dans le référentiel donné, se calcule à l'aide de la transformation de Legendre :

$$L = \int p_i v^i d\bar{w} + \int - D_i \frac{\partial A^i}{\partial t} d\bar{w} - H$$

ce qui donne, à l'aide de (26) et (27) :

$$L = \int \{ r u^0 u^i v_i + \rho u^0 (A^i + A^i) v_i \} d\bar{w} + \int - D_i \frac{\partial A^i}{\partial t} d\bar{w} - \int \{ r(u^0)^2 c^2 - G \} d\bar{w} - \int \rho u^0 (\phi + V) d\bar{w} - \int \left(\frac{D^2}{2\epsilon_0} + \frac{B^2}{2\mu_0} + \vec{D} \cdot g\vec{r} \vec{a} d\phi \right) d\bar{w}$$

D'où :

$$(30) \quad L = \int (-rc^2 + G) d\bar{\omega} + \int \{ \rho u^i (A_i + A_{\bar{i}}) - \rho u^0 (\phi + V) \} d\bar{\omega} + \int \left(\frac{D^2}{2\epsilon_0} - \frac{B^2}{2\mu_0} \right) d\bar{\omega}$$

Mais ce n'est pas cette forme, liée à un référentiel qui est la plus intéressante, c'est l'action $S = \int L dt$ qui, comme on le sait a une expression covariante relativiste. Si V est le quadrivolume compris entre deux hypersurfaces Σ et Σ' de type espace (identiques à celles déjà utilisées pour la définition de la 2-forme invariante), et si l'on pose $d\Omega = d\bar{\omega} dt$, il vient en effet :

$$(31) \quad S = \int_V (-rc^2 + G) d\Omega + \int (A_\mu + A_{\bar{\mu}}) j^\mu d\Omega - \frac{1}{4\mu_0} \int F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} d\Omega$$

Il est alors facile de retrouver les équations du mouvement (9) et (10) à partir du principe variationnel suivant : S est extremum sachant que les variations des variables de configuration indépendantes $x^\rho(\alpha^j, \theta)$ et $A^\mu(x^\sigma)$, sont nulles aux deux extrémités de la trajectoire, c'est à dire, ici, sur les deux surfaces Σ et Σ' .

Démonstration : on a, d'après (31)

$$\delta S = \int_V \left(-c^2 \partial r + \partial G + \partial A_\mu j^\mu + (A_\mu + A_{\bar{\mu}}) \partial j^\mu - \frac{1}{2\mu_0} \partial F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right) d\Omega$$

Si l'on tire ∂r de (14) et ∂j^μ de (19), il vient :

$$\begin{aligned} \delta S = \int_V \{ & -\partial G - c^2 r \frac{\partial_\rho F}{F} \delta x^\rho + c^2 r \partial_\lambda \delta x^\lambda + r u^\rho u^\sigma \partial_\sigma \delta x_\rho + c^2 \partial_\rho r \delta x^\rho + \partial G \\ & + j^\mu \partial A_\mu + (A_\mu + A_{\bar{\mu}}) j^\lambda \partial_\lambda \delta x^\mu - (A_\mu + A_{\bar{\mu}}) \partial_\lambda (j^\mu \delta x^\lambda) - \frac{1}{\mu_0} \partial_\mu \partial A_\nu F^{\mu\nu} \} d\Omega \end{aligned}$$

En intégrant par parties là où il y a des dérivées des différentielles des variables de configuration, et en tenant compte du fait que les variations s'annulent aux limites, on a :

$$\begin{aligned} \delta S = \int_V \left(& -c^2 r \frac{\partial_\rho F}{F} \delta x^\rho - c^2 \partial_\rho r \delta x^\rho - \partial_\sigma (r u^\rho u^\sigma) \delta x_\rho + c^2 \partial_\rho r \delta x^\rho + j_\mu \partial A^\mu \right. \\ & \left. - \partial_\lambda (A_\rho + A_{\bar{\rho}}) j^\lambda \delta x^\rho + \partial_\rho (A_\lambda + A_{\bar{\lambda}}) j^\lambda \delta x^\rho + \frac{1}{\mu_0} \partial A_\nu \partial_\mu F^{\mu\nu} \right) d\Omega \end{aligned}$$

et l'on voit que le coefficient de δx^{ρ} donne bien (9) et celui de ∂A^{μ} , (10).

On remarque, sur la forme (31) de S que l'on retrouve bien l'expression habituellement utilisée pour le champ électromagnétique, mais avec des termes de matière nouveaux et des intégrales ne posant aucun problème de convergence à cause de l'emploi de grandeurs continues et sommables, liées au fait que le milieu matériel est étendu.

IV.- CONSEQUENCES SUR LE MOUVEMENT DE LA MATIERE

L'étude précédente vient de nous montrer que l'évolution conjointe de la matière et du champ était hamiltonienne dans l'espace des phases Γ décrivant à la fois la matière et le champ. Mais l'on voit sur les expressions (21) de la 2-forme invariante, (27) de l'hamiltonien, (31) de l'action et sur les démonstrations correspondantes, que cette propriété n'est vraie que pour l'ensemble matière et champ à cause de l'existence de termes d'interaction dépendant de façon non additive des deux ensembles de variables à la fois.

Cependant, ce que l'on observe pratiquement, c'est le milieu matériel seul (le champ n'étant accessible qu'à l'aide de corps d'épreuve, donc de milieux matériels). Voyons donc quelles conséquences il est possible de tirer des considérations précédentes en ce qui concerne *le mouvement du fluide seul*. Ce mouvement est alors la projection du mouvement dans Γ sur l'espace des phases Γ_f du fluide. *Il n'est plus hamiltonien* à cause des interactions avec le champ : elles empêchent en effet, même dans le cas où $\partial V / \partial t = 0$, l'énergie du fluide dans un référentiel donné d'être une constante du mouvement, contrairement à ce qui se passe pour l'énergie totale (29), où il y a compensation grâce aux échanges d'énergie entre la matière et le champ. On remarque aussi que *la 2-forme correspondant au fluide n'est pas invariante*, ce qui équivaut, dans le cas d'un milieu continu pour lequel l'espace des phases est de dimension infinie, à la non conservation du volume dans cet espace et le théorème de Liouville n'est plus vrai.

On sait que le caractère hamiltonien ou non d'un système est lié non au mouvement particulier qu'il effectue mais à l'ensemble de ses évolutions possibles. Si, au lieu de considérer toutes les évolutions compatibles avec les lois physiques régissant le système, on ne s'intéresse qu'à une certaine classe de mouvements d'un

type particulier, celle-ci peut posséder de nouvelles propriétés que n'a pas l'ensemble plus grand de tous les mouvements possibles . Les propriétés précédemment démontrées à propos du fluide considéré comme seul observable sont valables si l'on tient compte de toutes les évolutions de la matière . Il peut cependant exister des classes plus restreintes de mouvements de ce fluide qui se déduisent d'un formalisme hamiltonien portant sur les variables de matière seules, parce qu'il y a, dans ce cas, découplage entre la matière et le champ . C'est ce qui arrive en particulier dans le cas très important des mouvements stationnaires, que nous verrons plus en détail à propos de l'équation de Schrödinger (voir le chapitre III, paragraphe II).

Revenons au cas général . On peut voir que *les équations nécessaires pour décrire le mouvement du fluide sans faire intervenir le champ ni les équations de Maxwell n'ont plus la forme différentielle* : en effet, il faut alors, pour tenir compte du champ électromagnétique interne, résoudre les équations de Maxwell par les formules des potentiels retardés (ce que nous ferons au chapitre IV), et l'on sait que ceci introduit des intégrales portant sur le passé du système, c'est à dire qu'il faut utiliser une *mécanique héréditaire* . En particulier, ceci fournit une explication au fait que le mouvement relativiste de points matériels en interaction ne puisse être hamiltonien dans l'espace des phases des particules seules ; les interactions relativistes devant nécessairement se propager à vitesse finie, la mécanique qui en résulte est de type héréditaire . Pour retrouver éventuellement un formalisme hamiltonien, il faut commencer par trouver un ensemble d'équations instantanées équivalent, ce qui nécessite l'introduction de variables cachées telles le champ électromagnétique interne considéré précédemment *.

Nous allons voir, dans le prochain chapitre, que l'on peut trouver de telles variables pour un très grand nombre de systèmes héréditaires.

* Voir à ce sujet la remarque de J.M.Souriau dans (24) p.212, à propos de laquelle il faut noter que l'emploi d'un milieu étendu permet d'échapper à la difficulté signalée, puisque l'on peut alors considérer des mouvements stationnaires qui ne rayonnent pas (voir F.Fer (9)) .



C H A P I T R E I I

REDUCTIBILITE DES SYSTEMES HEREDITAIRES

I . - INTRODUCTION

Nous nous occuperons ici de systèmes évolutifs, régis par des équations héréditaires, portant sur une variable $x \in R^n$, du type

$$(1) \quad \dot{x} = F(x, t) + \int_{-\infty}^t K(x(\tau), t, \tau) d\tau$$

K étant un noyau donné et le point désignant la dérivation par rapport au temps . Les équations de Volterra généralisées

$$(2) \quad \dot{x} = F(x, t) + \int_{-\infty}^t G\{x(\tau)\} \Psi(t-\tau) d\tau$$

en sont un cas particulier .

La question de savoir si ces systèmes sont essentiellement différents des systèmes dynamiques, ou de systèmes décrits à la fois par des équations différentielles et aux dérivées partielles, a été posée dès les débuts de la mécanique héréditaire (voir par exemple V.Volterra (28) p.212 et 213). Plus récemment, T.Vogel (27) a étudié ce problème et donné, pour les systèmes du type (2), une condition suffisante de réductibilité ainsi qu'un théorème montrant que tout système (2) peut être approché autant que l'on veut par un système dynamique à nombre suffisant de variables .

On sait également, en rhéologie, (voir par exemple l'article de J.M.Pierrard dans (20)) que dans le cas des systèmes viscoélastiques linéaires on peut traiter le problème de leur évolution en introduisant une infinité de variables cachées .

Nous nous proposons d'étendre ces résultats en donnant d'abord, sur une idée de F.Fer, une condition nécessaire et suffisante pour que les systèmes (1) soient réductibles, puis montrant qu'ils peuvent toujours, même dans le cas non linéaire, être ramenés à des systèmes dynamiques évoluant sous l'influence d'un champ interne, régi par des équations aux dérivées partielles.

II.- REDUCTIBILITE A DES EQUATIONS DIFFERENTIELLES

Nous dirons qu'un système héréditaire est réductible (sous-entendu, à un système d'équations différentielles ordinaires) s'il existe m variables supplémentaires z_α , $\alpha = 1, \dots, m$ telles que toute solution de (1), pour toutes les formes possibles de $F(x, t)$, soit solution du système :

$$(3) \quad \begin{cases} \dot{x}_i = A_i(x_j, z_\beta, t) & i = 1, \dots, n \\ \dot{z}_\alpha = B_\alpha(x_j, z_\beta, t) & \alpha = 1, \dots, m \end{cases}$$

Nous appellerons $m+n$ l'ordre total du système ; il sera dit minimal s'il n'existe pas de système équivalent à (1) d'ordre total $< m+n$. Le théorème de réductibilité est alors le suivant :

Théorème .- Soit $K(x(\tau), t, \tau)$ un noyau donné, dérivable en t et en x . Une condition nécessaire pour que le système (1) soit réductible, pour toute $F(x, t)$, au système (3) d'ordre minimal $m + n$, est qu'il existe des coefficients, dépendant éventuellement de t , $a_{ij}^{(l)}$ ($i, j = 1, \dots, n$, $l = 0, \dots, p_j - 2$, $\sum_j p_j = m + n$) et des fonctions $f_i(t, \tau)$ ($i = 1, \dots, n$) tels que

$$(4) \quad \frac{\partial^{p_i-1} K}{\partial t^{p_i-1}} = \sum_{j=1}^n \sum_{l=0}^{p_j-2} a_{ij}^{(l)} \frac{\partial^l K_j}{\partial t^l} + f_i(t, \tau)$$

Réciproquement, cette condition est suffisante pour que (1) soit réductible à un système différentiel d'ordre $\leq n \max\{p_i\}$.

Démonstration.— Remarquons d'abord que tout système (3) est équivalent à un système différentiel comportant des équations de degré supérieur à un mais ne faisant intervenir que les variables $x_i^{(l)}$, du type :

$$(5) \quad x_i^{(p_i)} = P_i(x_1, \dots, x_1^{(p_1-1)}, \dots, x_n, \dots, x_n^{(p_n-1)}, t)$$

($x^{(l)}$ désignant la dérivée $d^l x / dt^l$), avec $\sum_i p_i = m + n$.

Posons alors

$$\partial_l K_i = \frac{\partial^l K_i(x, t, \tau)}{\partial t^l}, \quad \overline{\partial_l K_i} = \partial_l K_i(x(t), t, t)$$

En dérivant (1) on obtient

$$\begin{aligned} \dot{x}_j &= F_j + \int_{-\infty}^t K_j(x(\tau), t, \tau) d\tau \\ (6) \quad \ddot{x}_j &= \frac{dF_j}{dt} + \overline{K_j} + \int_{-\infty}^t \partial_1 K_j(x(\tau), t, \tau) d\tau \end{aligned}$$

etc....

$$x_j^{(p_j)} = \frac{d^{p_j-1} F}{dt^{p_j-1}} + \frac{d^{p_j-2} \overline{K_j}}{dt^{p_j-2}} + \dots + \overline{\partial_{p_j-2} K_j} + \int_{-\infty}^t \partial_{p_j-1} K_j(x(\tau), t, \tau) d\tau$$

S'il existe une relation (5) entre les $x_i^{(l_i)}$, $i = 1, \dots, n$, $l_i = 0, \dots, p_i$, indépendante de $x(\tau)$, c'est que l'on peut $\forall t$, déduire de $x_j^{(q_j)}$,

$q_j = 0, \dots, p_j - 1$ les valeurs de $x_i^{(p_i)}$, $\forall x(\tau)$ compatible avec ces

valeurs . Donc si l'on varie $x(\tau)$ de $\delta x(\tau)$, les conditions $\delta x_i^{(q_j)} = 0$ ($q_j = 0, \dots, p_j-1$) entraînent $\delta x_i^{(p_i)} = 0$.

En utilisant (6) et en remarquant que, compte tenu de (5), les variations des dérivées de tous les ordres des x_i sont nulles, donc celles des termes de (6) ne figurant pas sous le signe somme aussi, ceci veut dire que

$$\int_{-\infty}^t \sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial x_k} (\partial_l K_j) \delta x_k(\tau) d\tau = 0, \quad \begin{matrix} j = 1, \dots, n \\ l = 0, \dots, p_j-2 \end{matrix}$$

entraîne

$$\int_{-\infty}^t \sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial x_k} (\partial_{p_i-1} K_i) \delta x_k(\tau) d\tau = 0, \quad i = 1, \dots, n$$

Or la condition nécessaire et suffisante pour qu'il en soit ainsi est qu'il existe des multiplicateurs de Lagrange a_{ij}^L , indépendants de τ , donc aussi de $x(\tau)$ mais dépendant éventuellement de t , tels que

$$\frac{\partial}{\partial x_k} (\partial_{p_i-1} K_i) = \sum_{j=1}^n \sum_{l=0}^{p_j-2} a_{ij}^L(t) \frac{\partial}{\partial x_k} (\partial_l K_j)$$

ce qui s'intègre immédiatement en donnant (4) .

Pour démontrer que (4) est une condition suffisante , il suffit de multiplier les p_j-1 premières équations (6) respectivement par $a_{ij}^0, \dots, a_{ij}^{p_j-2}$ et de les ajouter membre à membre à

$$x_i^{(p_i)} = \frac{d^{p_i-1} F}{dt^{p_i-1}} + \frac{d^{p_i-2} \overline{K_i}}{dt^{p_i-2}} + \dots + \overline{\partial_{p_i-2} K_i} + \int_{-\infty}^t \partial_{p_i-1} K_i(x(\tau), t, \tau) d\tau$$

pour que les intégrales disparaissent, laissant un système différentiel faisant intervenir les dérivées de chacun des x_i avec l'ordre maximum $\max\{p_i\}$.

Dans le cas des systèmes de Volterra (2), où le noyau a la forme particulière $G_i(x_j) \Psi_i(t-\tau)$, la condition (4) devient

$$(7) \quad G_i \Psi_i^{(p_i-1)} = \sum_{j=1}^n G_j \sum_{l=0}^{p_j-2} a_{ij}^L \Psi_j^{(l)} + f_i(t-\tau)$$

dans laquelle les $a_{ij}^{(l)}$ sont des constantes car ils seraient sinon fonction de $t-\tau$ ce qui est impossible. Mais les G_i étant des fonctions de x seul ne peuvent être déterminées en fonction des $\Psi_i^{(l)}$ et f_i qui sont des fonctions de $t-\tau$ seul. Il en résulte que tous les coefficients des G_j dans les équations (7) sont nuls. Ceci entraîne alors les n conditions

$$(8) \quad \Psi_i^{(p_i-1)} = \sum_{l=0}^{p_i-2} a_{ii}^{(l)} \Psi_i^{(l)}$$

Puisque ces équations sont linéaires et à coefficients constants, elles expriment le fait que les Ψ_i sont des sommes finies d'exponentielles. On retrouve là la condition suffisante de réductibilité donnée par T.Vogel (27).

Une conséquence importante de ce théorème est qu'il existe des systèmes héréditaires du type (2) qui sont irréductibles. Il suffit en effet de remarquer qu'il existe des fonctions dérivables Ψ qui ne sont pas des sommes finies d'exponentielles.

Ceci répond à l'objection de Painlevé à la mécanique héréditaire (voir T.Vogel (27)) : il existe bien des systèmes qui ne peuvent être étudiés que par des méthodes autres que les équations différentielles ordinaires, dont celles de la mécanique héréditaire. Mais ceci n'exclut pas d'autres méthodes, comme va le montrer le paragraphe suivant.

III .- REDUCTIBILITE A DES SYSTEMES ETENDUS AVEC CHAMP

A.- Cas général .-

Théorème . - Toute solution dérivable de (1) est également solution du système non héréditaire

$$(9) \quad \begin{cases} \dot{x} = F(x, t) + \int_0^\infty K(p(t, a), t, t-a) da \\ \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial a} = \delta(a) x(t) \end{cases}$$

(a nombre réel, $p(a, t)$ fonction à valeurs dans R^n), la deuxième équation étant à prendre au sens des distributions en ce qui concerne la variable a ,

$\delta(a)$ étant la mesure de Dirac et $p(a, t)$ une fonction dérivable par morceaux.

Réciproquement, si une solution $x(t)$, dérivable, de (9) croît moins vite à l'infini que $C \exp(b|t|^k)$, C, b, k constantes quelconques, elle est également solution de (1).

Démonstration. — Elle est basée sur le fait que l'on peut, à chaque instant t , faire correspondre à la trajectoire décrite par le système jusqu'à cet instant un champ, défini dans un espace à une dimension. Comme il ne doit faire intervenir que ce qui est connu à l'instant t , on peut prendre :

$$(10) \quad p(a, t) = H(a) x(t-a)$$

où $H(a)$ est la fonction d'Heaviside.

Pour montrer que toute solution de (1) vérifie (9) il suffit de dériver (10), soit

$$\begin{aligned} \frac{\partial p(a, t)}{\partial a} &= \delta(a) x(t) - H(a) x'(t) \\ \frac{\partial p(a, t)}{\partial t} &= H(a) x'(t-a) \end{aligned}$$

ce qui donne la deuxième équation (9). La première est bien vérifiée puisque $p = x(t-a)$ pour $a > 0$ et qu'en posant $a = t-\tau$ on a :

$$\int_{-\infty}^t K(x(\tau), t, \tau) d\tau = \int_0^{\infty} K(x(t-a), t, t-a) da$$

Réciproquement, supposons que nous ayons trouvé une solution de (9) satisfaisant aux hypothèses du théorème, et correspondant aux conditions initiales

$$(11) \quad x(t_0), \quad p(a, t_0) = H(a) x(t_0-a)$$

(c'est le passé du système jusqu'à $t = t_0$). Sous ces conditions, d'après un théorème sur l'unicité des solutions en théorie des distributions (voir I.M. Guelfand et E. Chilov (10)), on peut voir que $x(t)$ étant connue, $p(a, t)$ est unique.

Comme (10) est solution de la deuxième équation (9) et satisfait aux conditions initiales (11) c'est la seule . Il suffit alors de reporter cette valeur (10) dans la première équation (9) pour voir que $x(t)$ vérifie bien (1) .

Ce théorème montre donc que les systèmes héréditaires rentrent dans la classe des systèmes régis à la fois par des équations différentielles ordinaires et des équations aux dérivées partielles . Il faut cependant remarquer que le procédé employé, purement mathématique, ne fournit pas un champ ayant une signification physique directe, en particulier il est défini dans un espace à une seule dimension, ce qui ne correspond pas, en général, à la réalité physique . Mais on peut introduire, comme on le verra sur les deux exemples suivants, d'autres champs, régis par des équations aux dérivées partielles différentes de (9) et donnant des équations équivalentes à (1) . Cette indétermination est inévitable car les équations (1) sont des équations très générales, valables pour un grand nombre de systèmes physiques particuliers soumis à des champs de natures très différentes .

Il n'en reste pas moins que le théorème montre, par l'existence même de la fonction $p(a, t)$, que la recherche de champs équivalents mais ayant un sens physique est, d'un point de vue mathématique, parfaitement possible.

En ce qui concerne l'interprétation physique des équations (9), on peut faire les remarques générales suivantes . La nécessité d'une variable supplémentaire, a , en plus de x et de t , montre que l'on doit considérer les systèmes régis par (9) comme étendus, pour l'instant dans un espace abstrait à une dimension mais nous verrons plus loin sur le deuxième exemple que ce peut être l'espace physique habituel à trois dimensions . Comme la variable a , n'intervient pas dans les équations héréditaires (1), elle décrit ce qui est, pour celui qui ne s'intéresse qu'au phénomène décrit par (1) , l'intérieur du système . Puisque $p(a, t)$ est un champ défini sur l'espace des a , il n'agit que sur le système et non sur les corps extérieurs, tout au moins à l'approximation correspondant à l'équation (1) ; c'est donc un champ "caché" qu'il faut considérer comme interne au système, ce que l'on vérifiera bien sur les exemples donnés plus loin . Quant au phénomène étudié, son évolution est décrite par la première équation (9) et l'on voit qu'elle dépend, par l'intermédiaire de l'intégrale , des valeurs du champ en tous les points (dans l'espace des a) du système, traduisant ainsi une propriété globale de celui-ci .

Pour illustrer ceci, nous allons ^{donner}/immédiatement un exemple, celui du corps à viscoélasticité linéaire qui permettra de mettre facilement en évidence la multiplicité des champs possibles, tous équivalents à celui du théorème, ainsi que les particularités dues à la linéarité. Plus loin, au chapitre IV, le cas de l'électron de Lorentz montrera comment l'action, à l'intérieur d'un système étendu, d'un champ de signification bien connue, le champ électromagnétique retardé, conduit à des équations héréditaires du type (1).

B.- Viscoélasticité linéaire.

Considérons un système à une dimension, constitué d'une masse m liée à un corps viscoélastique de masse négligeable. Soient $F(x, t)$ la force extérieure agissant sur le système, x le déplacement de la masse par rapport à la position où le système est au repos sous une force extérieure nulle (c'est aussi la déformation du corps viscoélastique), $r(t)$ la fonction de relaxation.

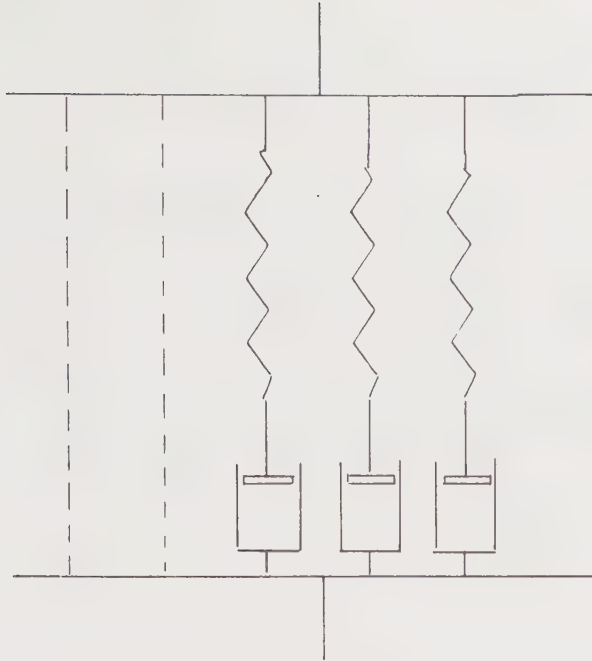
L'équation d'évolution, héréditaire du type Volterra, est :

$$(12) \quad m \ddot{x} = F(x, t) - r(0) x - \int_0^t r'(t-\theta) x(\theta) d\theta$$

si l'instant initial, $t = 0$, est tel que x et F y sont nuls.

On sait (voir par exemple l'article de J.M.Pierrard dans (20)) qu'un tel système est équivalent à un modèle de Maxwell généralisé à nombre infini de branches parallèles (voir figure ci-dessous), caractérisées par une densité $g(\tau)$ de module d'élasticité, fonction du temps de relaxation τ et liée à r par

$$(13) \quad r(t) - r(\infty) = \int_0^\infty g(\tau) \exp(-t/\tau) d\tau$$



(Chaque branche est un modèle de Maxwell, composé d'un ressort en série avec un amortisseur de comportement visqueux .)

Soit $\sigma(\tau, t)$ la densité de contrainte exercée sur chacune de ces branches, l'équation (12) est équivalente à

$$(14) \quad \left\{ \begin{array}{l} m \ddot{x} = F(x, t) - r(\infty) x - \int_0^\infty \sigma(\tau, t) d\tau \\ \frac{\partial \sigma(\tau, t)}{\partial t} = -\frac{1}{\tau} \sigma(\tau, t) + g(\tau) \dot{x} \end{array} \right.$$

et l'on voit, conformément au théorème précédent, que l'on a pu substituer à l'équation héréditaire (12) deux équations différentielles instantanées faisant intervenir le champ de contraintes internes $\sigma(\tau, t)$. On aurait également pu prendre comme champ la densité d'allongement du ressort dans chacune des branches. On retrouve là l'indétermination du champ signalée plus haut .

La première équation (14) montre bien le caractère global de la propriété étudiée : en effet c'est uniquement la contrainte totale, $\int_0^\infty \sigma(\tau, t) d\tau$ qui intervient dans l'équation du mouvement .

La deuxième équation (14) a ici une forme particulière, étant plutôt une équation différentielle où τ figure comme paramètre qu'une équation aux dérivées partielles . Ceci est dû au caractère linéaire de (12) qui a permis d'employer la transformée de Laplace (13) et de remplacer une dérivation par la multiplication par $1/\tau$. C'est aussi une transformée de Laplace en a qui permet de passer de la formule générale (9) à (14) et du champ $p(a, t)$ au champ $\sigma(\tau, t)$, comme on le voit aisément en résolvant la deuxième équation (14) et en appliquant la définition (10) de p , ce qui donne :

$$\sigma(\tau, t) = g(\tau) x(t) - \frac{g(\tau)}{\tau} \int_0^\infty \exp(-a/\tau) p(a, t) da$$

Mais cette méthode qui donne, à défaut de champs ayant un véritable sens physique (auquel il n'y aurait plus d'indétermination comme ci-dessus), une image à l'aide de modèles, ne convient qu'aux systèmes linéaires, contrairement à celle du théorème précédent.

C H A P I T R E III

FLUIDES QUANTIQUES CHARGES EN MECANIQUE HAMILTONIENNE

Après l'exposé de ces propriétés générales, nous allons revenir aux systèmes physiques particuliers que nous nous proposons d'étudier, les particules élémentaires et les systèmes de particules, et leur appliquer les méthodes précédentes .

Nous avons vu dans l'introduction qu'il y avait des raisons d'admettre que la mécanique des particules doive être héréditaire . Le théorème du chapitre II montre alors que, dans ce cas, il est possible de les décrire à l'aide d'un milieu continu.

On a une telle théorie avec la mécanique ondulatoire qui utilise pour décrire les particules une onde ψ étendue, que de nombreuses raisons (voir L. de Broglie (3)) poussent à considérer non comme purement statistique, mais réelle c'est à dire ayant une existence dans l'espace physique, même pour une particule individuelle. Nous adoptons donc ici la théorie de la double solution de L. de Broglie (5) .

Plus précisément, et ceci nous permettra de revenir au modèle d'électron de Lorentz dont nous étions partis, nous allons, dans ce chapitre, étudier le *mouvement de fluides* (ou plus généralement de milieux continus qui, étant déformables, sont plus brièvement désignés par le terme de fluides) *correspondant à différentes équations d'onde*, Klein-Gordon, Schrödinger, Pauli, *en tenant compte de l'action de leur propre champ électromagnétique retardé* . Nous reprenons donc ici l'interprétation hydrodynamique de la mécanique ondulatoire, connue pour l'équation de Schrödinger depuis les travaux de E.Madelung (16) et qui a été étendue, en

y incorporant le champ électromagnétique interne par F.Fer (9) .

Nous montrerons alors que les résultats obtenus au chapitre I à propos du fluide isotherme et holonome peuvent s'étendre aux fluides quantiques, en donnant une 2-forme qui est invariante dans le mouvement à condition de considérer un certain nombre de champs supplémentaires comme variables indépendantes . On aura ainsi une formulation hamiltonienne et toutes les conséquences physiques déjà dégagées s'étendront sans modifications .

Enfin, en appendice, nous écrirons l'équation fonctionnelle de Jacobi du fluide quantique correspondant à l'équation de Schrödinger et nous verrons qu'elle admet comme solutions la phase des solutions de l'équation de Schrödinger, justifiant ainsi, sans considération de l'approximation $\hbar \rightarrow 0$, le nom d'équation de Jacobi donnée à la partie réelle de l'équation d'onde .

I.- EQUATION DE KLEIN-GORDON .

A.- Définition du fluide quantique correspondant à l'équation de Klein-Gordon .

Les notations générales sont celles du chapitre I, en particulier μ désignera la densité propre de masse propre . Ce qui caractérise ce fluide et permet de le qualifier de quantique est l'expression de son tenseur des contraintes, lié au potentiel quantique de L. de Broglie . En effet, nous posons, en généralisant une formule de F.Fer,

$$(1) \quad \Theta_{\rho\sigma} = \frac{\hbar^2}{2m^2} f^2 \partial_\rho \partial_\sigma \log f$$

($\hbar = h / 2\pi$, h constante de Planck), f étant donnée à partir de la densité propre de masse propre par l'équation

$$(2) \quad \frac{\hbar^2}{2m^2} \frac{\square f}{f} + \frac{\mu}{f^2} - 1 = 0 \quad \text{où} \quad \square = \partial^\alpha \partial_\alpha = \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

On remarque immédiatement sur cette équation, que la présence du d'Alembertien implique une propagation, donc un retard, qui nous obligera de même que pour le champ électromagnétique, à introduire une variable indépendante correspondant à la densité f , amplitude de l'onde au sens de de Broglie . Nous appellerons plus brièvement f le "champ quantique " .

Ces définitions permettent alors de montrer que le tenseur des contraintes correspond bien à un milieu holonome au sens de Lichnerowicz, d'indice F^* tel que

$$(3) \quad F^2 = \mu^2 / f^2$$

En effet on a, d'après (1)

$$\begin{aligned} \partial^\sigma \Theta_{\rho\sigma} &= \frac{\hbar^2}{2m^2} \partial^\sigma (f^2 \partial_\rho \partial_\sigma \log f) = \frac{\hbar^2}{2m^2} \partial^\sigma (f^2 \partial_\rho \frac{\partial_\sigma f}{f}) \\ &= \frac{\hbar^2}{2m^2} \partial^\sigma (f \partial_\rho \partial_\sigma f - \partial_\rho f \partial_\sigma f) = \frac{\hbar^2}{2m^2} (f \partial_\rho \square f - \partial_\rho f \square f) \\ &= \frac{\hbar^2}{2m^2} f^2 (\frac{\partial_\rho \square f}{f} - \frac{\partial_\rho f}{f^2} \square f) = \frac{\hbar^2}{2m^2} f^2 \partial_\rho (\frac{\square f}{f}) \end{aligned}$$

Or, d'après (2) et (3) :

$$\frac{\square f}{f} = m^2 c^2 (1 - F^2) \Rightarrow \partial_\rho (\frac{\square f}{f}) = - \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} 2 F \partial_\rho F$$

d'où

$$\partial^\sigma \Theta_{\rho\sigma} = - \frac{\hbar^2}{2m^2} \frac{\mu}{F^2} \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} 2 F \partial_\rho F = -\mu c^2 \partial_\rho \log F$$

ce qui est bien la définition d'un milieu holonome .

Les équations du mouvement d'un tel milieu dans un champ électromagnétique externe, $F^{\mu\nu}$, sont

$$(4) \quad \partial_\sigma (\mu u^\rho u^\sigma) = - \mu c^2 \frac{\partial^\rho F}{F} + F^{\rho\nu} \partial_\nu u_\nu$$

l'équation de continuité qui en résulte étant, comme au chapitre I,

* - On remarque d'ailleurs que cette quantité est liée de façon simple à la masse variable M_o introduite par L. de Broglie (5) dans sa théorie de la double solution : on a en effet $M_o = F m_o$, m_o étant la masse propre habituelle de la particule, et les notations employées ici étant différentes de celles de (5), en particulier en ce qui concerne le d'Alembertien .

$$(5) \quad \partial_{\sigma} \left(\frac{\mu u^{\sigma}}{F} \right) = 0$$

Ceci permet alors d'écrire (4) sous la forme :

$$(6) \quad u^{\sigma} \partial_{\sigma} u^{\rho} = -c^2 \frac{\partial^{\rho} F}{F} - u^{\rho} u^{\sigma} \frac{\partial_{\sigma} F}{F} + \frac{\rho}{\mu} F^{\rho\nu} u_{\nu}$$

Nous considérons ici encore la charge électrique comme liée à la matière, mais en outre nous supposons que son rapport avec la densité de masse est constant et tel que :

$$(7) \quad F \frac{\rho}{\mu} = \frac{e}{m} \quad \text{d'où} \quad \partial_{\sigma} (\rho u^{\sigma}) = 0$$

On peut alors voir, en utilisant la méthode de Madelung, que, lorsque le mouvement est irrotationnel (voir A.Lichnerowicz (14)) ce qui permet de poser

$$(8) \quad \frac{e}{m} A^{\alpha} + F u^{\alpha} = \partial^{\alpha} S$$

les équations (5) et (6) sont des conséquences de l'équation de Klein-Gordon

$$(9) \quad \square \Psi - \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \Psi = \frac{ie}{\hbar} \partial_{\mu} A^{\mu} \Psi + \frac{2ie}{\hbar} A^{\mu} \partial_{\mu} \Psi + \frac{e^2}{\hbar^2} A_{\mu} A^{\mu} \Psi$$

si l'on écrit :

$$(10) \quad \Psi = f \exp \left(\frac{im}{\hbar} S \right)$$

En effet, cette dernière définition permet, on le sait, de décomposer (9) en deux équations réelles ; l'une pour la partie réelle

$$(11) \quad \frac{\square f}{f} - \frac{m^2}{\hbar^2} \partial_{\alpha} S \partial^{\alpha} S - \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} + \frac{2e}{\hbar} A^{\alpha} \frac{m}{\hbar} \partial_{\alpha} S - \frac{e^2}{\hbar^2} A^{\alpha} A_{\alpha} = 0$$

est dite équation de Jacobi, l'autre pour la partie imaginaire

$$(12) \quad \frac{2m}{\hbar} \frac{\partial^\alpha f}{f} \partial_\alpha S + \frac{m}{\hbar} \square S - \frac{e}{\hbar} \partial_\alpha A^\alpha - \frac{2e}{\hbar} A^\alpha \frac{\partial_\alpha f}{f} = 0 ,$$

équation de continuité . Cette dernière correspond bien à l'équation de continuité du fluide ; en effet (12) s'écrit

$$2 \frac{\partial_\alpha f}{f} (m \partial^\alpha S - e A^\alpha) + \partial^\alpha (m \partial_\alpha S - e A_\alpha) = 0$$

et d'après (8) il vient

$$2 \frac{\partial_\alpha f}{f} F u^\alpha + \partial_\alpha (F u^\alpha) = 0$$

Or, d'après (3) on a

$$2 \frac{\partial_\alpha f}{f} = \frac{\partial_\alpha \mu}{\mu} - 2 \frac{\partial_\alpha F}{F} , \text{ d'où en reportant :}$$

$$\frac{\partial_\alpha \mu}{\mu} F u^\alpha - \partial_\alpha F u^\alpha + F \partial_\alpha u^\alpha = 0$$

et, en multipliant par μ/F^2 il vient

$$\frac{\partial_\alpha \mu}{F} u^\alpha - \frac{\partial_\alpha F}{F^2} \mu u^\alpha + \frac{\mu}{F} \partial_\alpha u^\alpha = 0$$

c'est à dire (5) .

Pour obtenir l'équation du mouvement sous sa forme (6), il faut dériver l'équation (11) de Jacobi

$$\hbar^2 \partial_\beta \left(\frac{\square f}{f} \right) + 2m \partial_\alpha \partial_\beta S (-m \partial^\alpha S + e A^\alpha) + 2e \partial_\beta A_\alpha (m \partial^\alpha S - e A^\alpha) = 0$$

et en utilisant (8) pour introduire la vitesse du fluide :

$$\hbar^2 \partial_\beta \left(\frac{\square f}{f} \right) - 2m^2 F u^\alpha \partial_\alpha (F u_\beta + \frac{e}{m} A_\beta) + 2em \partial_\beta A_\alpha F u^\alpha = 0$$

Comme $\partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha = F_{\alpha\beta}$ et en remplaçant $\square f/f$ par sa valeur tirée de (2), on a

$$-\frac{\hbar^2}{m^2} \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} 2F \partial_\beta F - 2F \partial_\alpha F u^\alpha u_\beta - 2F^2 u^\alpha \partial_\alpha u_\beta - \frac{2e}{m} F u^\alpha F_{\alpha\beta} = 0$$

en divisant par $2F^2$ et en usant de (7), on retrouve bien (6) .

B. Mouvement avec champ interne et forme invariante .

Les équations précédentes d'un milieu continu correspondant à une particule élémentaire relativiste ne tiennent pas compte de l'action du champ électromagnétique retardé créé par la particule sur elle-même . Nous allons désormais l'introduire ce qui fait que les équations régissant le mouvement du fluide sont, avec les notations du chapitre I :

$$(13) \quad \partial_\sigma (\mu u^\rho u^\sigma) = \partial_\sigma \Theta^{\rho\sigma} + (F^{\rho\nu} + F^{\rho\nu}) j_\nu ,$$

$F^{\rho\nu}$ étant le champ interne . Il faut alors remarquer que l'on ne peut plus, à cause de ce champ, remonter par la méthode de Madelung des équations (13) et (5) à l'équation de Klein-Gordon que nous considérons donc comme valable seulement approximativement dans le cas où le champ interne est négligeable, ou compensé par d'autres phénomènes (voir le paragraphe II ci-après) .

L'espace des mouvements du système ainsi considéré est alors composé des ensembles de fonctions suivantes :

- pour le fluide, l'application de R^4 dans R^4 : $x^\rho(\alpha^j, \theta)$
- pour le champ quantique, il faut prendre comme variable indépendante, d'après (2), l'application de R^4 dans R : $f(x^\rho)$
- pour le champ électromagnétique interne, l'application de R^4 dans R^4 définie par $A^\rho(x^\sigma)$.

Les équations d'évolution forment de même trois groupes concernant respectivement le fluide, le tenseur des contraintes quantique, le champ électromagnétique interne :

$$(13) \quad \partial_\sigma (\mu u^\rho u^\sigma) = \partial_\sigma \Theta^{\rho\sigma} + (F^{\rho\nu} + F^{\rho\nu}) j_\nu$$

$$(2) \quad \frac{\hbar^2}{m^2 c^2} \frac{\square f}{f} + \frac{\mu}{f^2} - 1 = 0$$

$$(14) \quad \partial_\nu F^{\mu\nu} = \mu_0 j^\mu$$

$\Theta^{\rho\sigma}$ étant défini par (1) en fonction de f , $F^{\mu\nu}$ par la relation classique $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ en fonction du champ interne A_μ , et $F^{\rho\nu}$, champ électromagnétique externe étant donné.

Les équations de conservation de la masse et de la charge sont alors des conséquences de ce système d'équations.

Les variations indépendantes seront celles des différentes grandeurs indépendantes, $\delta x^\rho(x^\sigma)$, $\delta f(x^\rho)$, $\delta A^\mu(x^\rho)$, soumises à la condition de conservation de la masse

$$(15) \quad \delta \left(\frac{\mu u^\sigma}{F} dS_\sigma \right) = 0$$

valable quel que soit dS_σ élément de 3-surface liée au fluide, dont la variation est donnée par l'équation (5) du chapitre I. D'après (7) on a aussi

$$(16) \quad \delta (j^\sigma dS_\sigma) = 0$$

On peut alors voir, en modifiant légèrement la démonstration du chapitre I, que les équations d'évolution (13), (2), (14) admettent la 2-forme invariante

$$(17) \quad \omega_\Sigma = \int_\Sigma \left(\delta(\mu u^\rho u^\sigma dS_\sigma) \wedge \delta x_\rho + \mu c^2 \frac{\partial F}{F} \wedge \delta x^\lambda dS_\lambda + \frac{\hbar^2}{m^2} \partial f \wedge \partial^\alpha \partial f dS_\alpha \right. \\ \left. + j^\sigma \delta(A^\rho + A^\rho) \wedge \delta x_\rho dS_\sigma - j_\sigma \partial A^\sigma \wedge \delta x^\rho dS_\rho + \frac{1}{\mu_0} \partial F^{\mu\nu} \wedge \partial A_\mu dS_\nu \right)$$

(Σ 3-surface de type espace) en ce sens que, quelle que soit Σ' autre hypersurface de type espace, on a, pour tout couple de variations δ_1 et δ_2 :

$$\omega_\Sigma(\delta_1, \delta_2) = \omega_{\Sigma'}(\delta_1, \delta_2)$$

Démonstration : elle est identique à celle du chapitre I aux termes de contraintes près. On s'aperçoit alors que sous l'intégrale de volume, il reste, en ce qui concerne les termes neutres $-c^2 \frac{\partial F}{F} \wedge \partial \mu$ et le terme en $\hbar$ de ω_Σ

soit $\frac{\hbar^2}{m^2} \partial f \wedge \square \partial f$. Mais, grâce à (3), on a :

$$- c^2 \frac{\partial F}{F} \wedge \partial \mu = c^2 \frac{\partial f}{f} \wedge \partial \mu$$

et en variant (2), il vient :

$$\partial \mu = 2f \partial f - \frac{\hbar^2}{m^2 c^2} \partial f \square f - \frac{\hbar^2}{m^2 c^2} f \square \partial f$$

En reportant cette valeur dans l'égalité précédente, on a :

$$- c^2 \frac{\partial F}{F} \wedge \partial \mu = - c^2 \frac{\partial f}{f} \wedge \frac{\hbar^2}{m^2 c^2} f \square \partial f$$

qui est l'opposé du terme en $\hbar$ de ω_Σ ; il y a donc invariance .

Lorsque l'hypersurface Σ se réduit à un plan $t = c^t e$, Π , il vient

$$(18) \quad \omega_\Pi = \int_{R^3} \left(\delta(\mu u^\rho u^\sigma d\bar{w}) \wedge \delta x_\rho + \mu c^2 \frac{\partial F}{F} \wedge \delta t d\bar{w} - \frac{\hbar^2}{m^2 c^2} \partial f \wedge \partial_t \partial f d\bar{w} \right. \\ \left. \rho u^\sigma \delta(A^\rho + A^\sigma) \wedge \delta x_\rho d\bar{w} - j^\sigma \partial A_\sigma \wedge \delta t d\bar{w} + \frac{1}{\mu_0} \partial F^{\mu\sigma} \wedge \partial A_\mu d\bar{w} \right)$$

et si l'on ^{ne} considère que l'élément d'invariant intégral au sens de Poincaré, il suffit de prendre $\delta t = 0$ d'où

$$(19) \quad \beta = \int_{R^3} \left(\delta \mu (u^\sigma)^2 v^i + \rho u^\sigma (A^i + A^i) d\bar{w} \wedge \delta x_i - \frac{\hbar^2}{m^2 c^2} \partial f \wedge \partial_t \partial f d\bar{w} - \partial D_i \wedge \partial A^i d\bar{w} \right)$$

Sur cette dernière expression on voit apparaître les variables canoniques conjuguées qui serviront dans le formalisme hamiltonien . On remarque aussi que, même en l'absence de charge et de champ électromagnétique interne, la partie purement fluide de la 2-forme n'est pas invariante car il faut ajouter le terme de champ quantique, que l'on ^{ne} peut calculer en fonction du mouvement de la matière que par des formules de type héréditaire puisque (2) est une équation hyperbolique. Toutes les conclusions du chapitre I sont donc valables, même pour une particule non chargée, dès qu'elle obéit à l'équation de Klein-Gordon .

C.-Hamiltonien et lagrangien dans un référentiel donné .

D'après ce qui précède, on voit que l'on va pouvoir faire dériver les équations d'évolution (13),(2),(14), écrites dans un référentiel donné, d'un formalisme hamiltonien . Pour cela, il faut d'abord écrire ces équations en formalisme tridimensionnel . En procédant comme au chapitre I, on trouve :

$$(20) \quad \frac{\mu u^0}{F} \frac{d(F\vec{u})}{dt} = - \mu c^2 \frac{grad F}{F} + \rho u^0 (\vec{E} + \vec{E}) + \rho u^0 \vec{v} \wedge (\vec{B} + \vec{B})$$

$$(2) \quad \frac{\hbar^2}{m^2 c^2} \frac{\square f}{f} + \frac{\mu}{f^2} - 1 = 0$$

$$(21) \quad \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = - \vec{j} + rot \vec{H} \quad ; \quad div \vec{D} = \rho u^0$$

$$F \text{ étant donnée par (3) : } F^2 = \mu/f^2 \quad \text{et} \quad \vec{B} = \mu_0 \vec{H} = rot \vec{A}$$

Les équations de conservation de la masse et de la charge sont :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\mu u^0}{F} d\bar{\omega} \right) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{d}{dt} (\rho u^0 d\bar{\omega}) = 0$$

et dans toute variation du mouvement on aura :

$$(22) \quad \delta \left(\frac{\mu u^0}{F} d\bar{\omega} \right) = 0 \quad \text{et} \quad \delta (\rho u^0 d\bar{\omega}) = 0$$

Les variables conjuguées canoniques sont, en accord avec (19) :

$$(23) \quad x^i (a^j) \text{ et } p_i = \mu u^0 u_i + \rho u^0 (A_i + A_i) \quad \text{pour le fluide}$$

$$(24) \quad f (x^i) \text{ et } g = \frac{\hbar^2}{m^2 c^2} \partial_t f = \kappa \partial_t f \quad \text{pour le champ quantique}$$

$\phi, A^i (x^j) \text{ et } -D_i$, pour le champ électromagnétique interne de sorte que

la forme invariante a la forme canonique :

$$(25) \quad \beta = \int \delta(p_i d\bar{\omega}) \wedge \delta x^i + \int \partial g \wedge \partial f d\bar{\omega} - \int \partial D_i \wedge \partial A^i d\bar{\omega}$$

Les équations d'évolution (20), (2), (21), peuvent alors se déduire de l'hamiltonien

$$(26) \quad H = \int \left(\mu (u^0)^2 c^2 - \frac{\mu c^2}{2} + \frac{g^2}{2\kappa} + c^2 \frac{f^2}{2} - \kappa \frac{c^2}{2} f \Delta f \right) d\bar{w} \\ + \int \rho u^0 (\phi + V) d\bar{w} + \int \left(\frac{\vec{D}^2}{2\epsilon_0} + \frac{(\text{rot} \vec{A})^2}{2\mu_0} + \vec{D} \cdot \text{grad} \phi \right) d\bar{w}$$

et des équations canoniques, résumées en l'égalité des différentielles :

$$(27) \quad \delta H = \int \left(\delta(p_i d\bar{w}) v^i - \frac{d(p_i d\bar{w})}{dt} \delta x^i \right) + \int \left(\partial g \frac{\partial f}{\partial t} - \frac{\partial g}{\partial t} \partial f \right) d\bar{w} \\ + \int \left(-\partial \vec{D} \cdot \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot \partial \vec{A} \right) d\bar{w}$$

Démonstration : il s'agit de calculer δH ; comme au chapitre I, nous prendrons en fait comme variable $F\vec{u}$ au lieu de $\vec{p}$. Les termes électriques sont identiques au cas du fluide holonome isotherme, il suffit donc de calculer la variation de la première intégrale. On a, comme au chapitre I :

$$\int \mu (u^0)^2 c^2 d\bar{w} = \int \left(\frac{\mu u^i}{F} \delta(F u_i) + \mu c^2 \frac{\partial F}{F} + \mu c^2 \frac{\partial_i F}{F} \delta x^i \right) d\bar{w}$$

Or, ici, $F^2 = \mu / f^2$ d'où

$$\partial F / F = \frac{1}{2} \partial \mu / \mu - \partial f / f$$

$$\delta \int \mu (u^0)^2 c^2 d\bar{w} - \delta \int \frac{\mu c^2}{2} d\bar{w} = \int \left(\frac{\mu u^i}{F} \delta(F u_i) - \mu c^2 \frac{\partial f}{f} + \mu c^2 \frac{\partial_i F}{F} \delta x^i \right) d\bar{w}$$

D'autre part, en intégrant par parties

$$\delta \int f \Delta f d\bar{w} = -\delta \int \partial_i f \partial^i f d\bar{w} = -2 \int \partial_i f \partial \partial_i f d\bar{w} = 2 \int \Delta f \partial f d\bar{w}$$

d'où

$$\delta \int \left(\frac{g^2}{2\kappa} + c^2 \frac{f^2}{2} - \kappa \frac{c^2}{2} f \Delta f \right) d\bar{w} = \int \left(\frac{g}{\kappa} \partial g + c^2 f \partial f - \kappa c^2 \Delta f \partial f \right) d\bar{w}$$

ce qui donne, en tout :

$$\delta H = \int \left[\frac{\mu u^i}{F} \delta(Fu_i) - \mu c^2 \frac{\partial f}{f} + \mu c^2 \frac{\partial_i F}{F} \delta x^i + \frac{g}{\kappa} \partial g + c^2 f \partial f - \kappa c^2 \Delta f \partial f \right] d\bar{w} \\ + \int \left[\rho u^0 \partial_i (\phi + V) \delta x^i + \rho u^0 \partial \phi + \vec{E} \cdot \partial \vec{D} + \text{rot} \vec{H} \cdot \partial \vec{A} + g \vec{a} d\phi \cdot \partial \vec{D} - \text{div} \vec{D} \partial \phi \right] d\bar{w}$$

d'où l'on tire aisément les équations d'évolution en identifiant avec (27) qui s'écrit, avec les notations employées ici :

$$\delta H = \int \left(\frac{\mu u^0}{F} \delta(Fu^i) + \rho u^0 \partial_j (A^i + A^i) \delta x^j + \rho u^0 \partial A^i \right) v_i d\bar{w} \\ - \int \left(\frac{\mu u^0}{F} \frac{d(Fu^i)}{dt} + \rho u^0 \partial_j (A^i + A^i) v^j + \rho u^0 \frac{\partial}{\partial t} (A^i + A^i) \right) \delta x_i d\bar{w} \\ + \int \left(\partial g \frac{\partial f}{\partial t} - \frac{\partial g}{\partial t} \partial f \right) d\bar{w} + \int \left(-\partial \vec{D} \cdot \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot \partial \vec{A} \right) d\bar{w}$$

La valeur de l'hamiltonien, compte tenu des équations d'évolution de f et ϕ , est :

$$H = \int \mu (u^0)^2 c^2 d\bar{w} + \frac{1}{2} \int \left(\frac{g^2}{\kappa} - f \kappa \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \right) d\bar{w} + \int \rho u^0 V d\bar{w} \\ + \int \frac{\epsilon_0 E^2 + \mu_0 H^2}{2} d\bar{w}$$

Tous les termes en sont d'interprétation évidente, sauf celui du champ quantique . Or, d'après (1)

$$\Theta_{00} = \frac{\kappa c^2}{2} f^2 \frac{\partial^2 \log f}{\partial t^2}$$

de sorte que l'énergie correspondante est :

$$- \frac{1}{c^2} \int \Theta_{00} d\bar{w} = - \int \Theta^{00} c^2 d\bar{w}$$

puisque $\mu (u^0)^2 c^2 = T^{00} c^2$ est le terme regroupant l'énergie de masse et l'énergie cinétique . Or,

$$\begin{aligned} -\frac{1}{c^2} \int \Theta_{00} d\bar{\omega} &= -\frac{1}{2} \int \kappa f^2 \frac{\partial^2 \log f}{\partial t^2} d\bar{\omega} = -\frac{\kappa}{2} \int f^2 \left(\frac{\partial_t^2 f}{f} - \frac{\partial_t f \partial_t f}{f^2} \right) d\bar{\omega} \\ &= \frac{1}{2} \int \left(\frac{g^2}{\kappa} - \kappa f \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \right) d\bar{\omega} \end{aligned}$$

qui est bien le terme trouvé plus haut . On a donc comme valeur de l'énergie totale du système :

$$(28) \quad H = \int \left(\mu (u^0)^2 c^2 - \Theta^{00} c^2 \right) d\bar{\omega} + \int \rho u^0 V d\bar{\omega} + \int \frac{\epsilon_0 E^2 + \mu_0 H^2}{2} d\bar{\omega}$$

Naturellement, dès que $\partial V / \partial t = 0$, ceci est une constante du mouvement.

Le langragien correspondant à (26) est, toujours dans le même référentiel, donné par la transformation de Legendre :

$$L = \int p_i v^i d\bar{\omega} + \int g \frac{\partial f}{\partial t} d\bar{\omega} - \int D_i \frac{\partial A^i}{\partial t} d\bar{\omega} - H$$

ce qui, compte tenu de (26) et des définitions (23), (24) de $\vec{p}$ et g donne :

$$(29) \quad L = \int \left(-\mu \frac{c^2}{2} + (A_\mu + \mu) j^\mu - \frac{1}{4\mu_0} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{\kappa}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)^2 - \frac{f^2 c^2}{2} + \frac{\kappa c^2}{2} f \Delta f \right) d\bar{\omega}$$

Ceci conduit à la forme covariante de l'action :

$$(30) \quad \begin{aligned} \int \mathcal{L} d\Omega &= \int \left(-\mu \frac{c^2}{2} - \frac{f^2 c^2}{2} - \frac{\kappa c^2}{2} \partial_\mu f \partial^\mu f \right) d\Omega + \int (A_\mu + \mu) j^\mu d\Omega \\ &\quad - \frac{1}{4\mu_0} \int F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} d\Omega \end{aligned}$$

dont il est aisé de déduire, comme au chapitre I, les équations d'évolution à l'aide du principe variationnel :

$$\delta \int_V \mathcal{L} d\Omega = 0$$

où V est le volume compris entre les deux hypersurfaces Σ et Σ' de type espace, sur lesquelles les variations sont nulles .

On voit donc, d'après l'étude précédente, que nous avons un nouvel exemple de fluide matériel à mouvement héréditaire qui peut être néanmoins étudié à l'aide d'un formalisme hamiltonien, à condition d'introduire autant de variables (fonctions!) indépendantes qu'il y a de champs régis par des équations hyperboliques.

II.- EQUATION DE SCHRÖDINGER .

Nous allons étudier dans ce paragraphe la *limite non relativiste du fluide quantique précédent* lorsque l'on fait croître c indéfiniment dans la cinématique de la matière mais non en ce qui concerne le champ électromagnétique, pour lequel c reste fini, ce qui correspond au cas du fluide quantique étudié par F.Fer (9) . On sait que ceci est parfaitement possible du point de vue logique, l'expérience seule ayant montré que la vitesse de propagation du champ électromagnétique était aussi la vitesse limite de la théorie relativiste .

A.- Fluide de Madelung

C'est la limite du cas traité en A du paragraphe précédent, où l'on continue à négliger le champ électromagnétique créé par le fluide .

On sait que, moyennant un décalage de l'origine des énergies, traduit en posant $\Psi_{\text{(Klein-Gordon)}} = \Psi \exp(-\frac{imc^2}{\hbar} t)$, l'équation (9) se réduit à l'équation de Schrödinger :

$$(31) \quad i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Psi + V\Psi + \frac{ie\hbar}{m} \vec{A} \cdot \vec{\text{grad}} \Psi + \frac{ie\hbar}{2m} (\text{div} \vec{A}) \Psi + \frac{e^2}{2m} A^2 \Psi$$

Le fluide correspondant est celui de Madelung, défini en posant toujours

$$(10) \quad \Psi = f \exp \left(\frac{im}{\hbar} S \right)$$

la vitesse en chaque point du fluide étant alors donnée par la limite de (8) :

$$(32) \quad \frac{e}{m} \vec{A} + F \vec{v} = \vec{\text{grad}} S$$

puisque, comme $u^0 \rightarrow 1$, $\vec{u} \rightarrow \vec{v}$.

L'amplitude de l'onde, que nous avons appelée champ quantique, f , donnée par (2) devient simplement

$$(33) \quad f^2 = \mu$$

ce qui entraîne d'après (3), $F^2 = 1$; nous prendrons $F = +1$, de sorte que (32) s'écrit en définitive :

$$(34) \quad \vec{v} + \frac{e}{m} \vec{A} = \text{grad } S$$

expression qui définit $\vec{v}$ à partir de S et $\vec{A}$.

Le tenseur des contraintes (1) garde la même expression en ce qui concerne ses composantes spatiales Θ_{ij} , qui seules nous intéressent ici, et l'on démontre de la même manière qu'au paragraphe I que l'on a :

$$\partial_j \Theta^{ij} = \frac{\hbar^2}{2m^2} f^2 \partial^i \left(\frac{\Delta f}{f} \right)$$

On retrouve donc le potentiel quantique de de Broglie

$$(35) \quad Q = \frac{\hbar^2}{2m^2} \frac{\Delta f}{f}$$

permettant de poser

$$(36) \quad \partial_j \Theta^{ij} = \mu \partial^i Q$$

La densité de charge, puisque $F = 1$, est $\rho = \frac{e}{m} \mu$ et l'équation de continuité s'écrit :

$$(37) \quad \frac{\partial \mu}{\partial t} + \text{div} (\mu \vec{v}) = 0$$

dans le mouvement, et

$$(38) \quad \delta (\mu d\bar{\omega}) = 0$$

dans toute variation du mouvement fluide . Nous utiliserons la composante 0 de l'équation (5) du chapitre I, qui est la formule bien connue :

$$\delta (d\bar{\omega}) = \text{div } \delta \vec{x} d\bar{\omega}$$

L'équation d'évolution du fluide de Madelung étant

$$(39) \quad \mu \frac{d\vec{v}}{dt} = \mu \vec{\text{grad}} Q + \rho \vec{E} + \rho \vec{v} \wedge \vec{B}$$

ces définitions et les formules (33), (34) et (35) montrent alors que *cette équation et l'équation (37) de conservation de la masse sont des conséquences de l'équation de Schrödinger (31).*

B.- *Mouvement avec champ électromagnétique interne .*

En suivant F.Fer (7), les équations d'évolution d'un tel fluide sont :

$$(40) \quad \mu \frac{d\vec{v}}{dt} = \mu \vec{\text{grad}} Q - \mu \vec{\text{grad}} g + \rho (\vec{E} + \vec{E}) + \rho \vec{v} \wedge (\vec{B} + \vec{B})$$

$$(41) \quad \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = - \rho \vec{v} + \text{rot } \vec{H} \quad , \quad \text{div } \vec{D} = \rho$$

dont on voit immédiatement qu'elles sont la limite newtonienne (rappelons que celle-ci ne touche que la matière et non le champ) des équations (20) et (21) du § I,C, auxquelles on a cependant ajouté un terme de cohésion g défini par ,

$$(42) \quad g(\vec{x}, t) = \int \mu(\vec{a}, t) g(|\vec{x} - \vec{a}|) d^3a$$

(g fonction donnée) pour assurer la stabilité de l'électron (voir F.Fer (9)) qui manquait dans le cas relativiste, sa forme étant a priori difficile à imposer .

En faisant le passage à la limite à partir du § I, C , on voit que les équations (40) et (41) dérivent d'un formalisme hamiltonien à condition, comme

dans toute cette étude, de prendre le champ électromagnétique interne comme variable indépendante . Les variables conjuguées sont alors :

$$(43) \quad x^i(\alpha^j) \quad , \quad p_i = \mu v_i + \rho (A_i + A_i) \quad \text{pour le fluide}$$

$$(44) \quad \phi(x^j), A^i(x^j) \quad , \quad -D_i(x^j) \quad \text{pour le champ .}$$

Il existe une 2-forme invariante par les équations d'évolution :

$$(45) \quad \beta = \int \delta(p_i d\bar{w}) \wedge \delta x^i - \int \partial D_i \wedge \partial A^i d\bar{w}$$

ou, en explicitant p_i ,

$$\beta = \int \mu \delta v_i \wedge \delta x^i d\bar{w} + \int \rho \delta (A_i + A_i) \wedge \delta x^i d\bar{w} - \int \partial D_i \wedge \partial A^i d\bar{w}$$

Les équations du mouvement (40) et (41) se déduisent de l'hamiltonien

$$(46) \quad H = \int \left(\mu \frac{v^2}{2} - \mu Q + \frac{1}{2} \mu g \right) d\bar{w} + \int \rho (\phi + V) d\bar{w} \\ + \int \left(\frac{\vec{D}^2}{2\epsilon_0} + \frac{(\text{rot} \vec{A})^2}{2\mu_0} + \vec{D} \cdot g \vec{r} d\phi \right) d\bar{w}$$

et des équations canoniques, résumées en l'égalité des différentielles :

$$(47) \quad \delta H = \int \left(\delta(p_i d\bar{w}) v^i - \frac{d(p_i d\bar{w})}{dt} \delta x^i \right) + \int \left(- \partial D_i \frac{\partial A^i}{\partial t} + \frac{\partial D_i}{\partial t} \partial A^i \right) d\bar{w}$$

La valeur de l'hamiltonien est

$$(48) \quad W = \int \left(\mu \frac{v^2}{2} - \mu Q + \frac{1}{2} \mu g \right) d\bar{w} + \int \rho V d\bar{w} + \int \frac{\epsilon_0 E^2 + \mu_0 H^2}{2} d\bar{w}$$

qui, lorsque V est indépendant du temps (système conservatif) est une intégrale première du mouvement, l'énergie totale du système . On y retrouve bien les trois termes, fluide, champ externe, champ interne déjà notés par F.Fer, et toutes les interprétations données à ce propos restent valables ; mais on voit également qu'il existe une autre méthode d'étude de ces équations que la méthode héréditaire, ainsi que nous l'avons déjà dit au chapitre II.

Si l'ensemble des mouvements auxquels on s'intéresse est composé uniquement des *mouvements stationnaires* de ce système, on a

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = 0 \quad \text{et de même} \quad \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = 0$$

On s'aperçoit alors que la partie de la 2-forme correspondant au champ est invariante séparément et ceci entraîne que la partie relative au fluide, $\int \delta(p_i d\bar{\omega}) \wedge \delta x^i$, l'est également. Ceci montre que, dans ce cas, le mouvement du fluide seul est hamiltonien; on retrouve là le formalisme des mouvements permanents déjà utilisé par F.Fer (9) (équation (2), Note B). Il faut noter que *c'est le fait que le retard de propagation des champs ne joue plus aucun rôle dans les mouvements permanents qui fait que la matière seule a bien un mouvement de type hamiltonien, caractère qui disparaît dans les mouvements transitoires.*

III - EQUATION DE PAULI .

Nous allons donner ici une interprétation fluide, puis l'extension des idées et du formalisme précédents, à une forme généralisée de l'équation de Pauli, donnée en premier par F.Bopp et R.Haag (2) et qui nous paraît indispensable pour établir une interprétation fluide, et même plus généralement puisqu'elle permet également d'étendre l'explication par mouvement brownien (voir J.P. Caubet (7)), formellement assez proche de celle qui sera développée ici, tant que l'on ne tient pas compte du champ interne.

La méthode de F.Bopp et R.Haag, bien qu'assez ancienne, étant curieusement peu connue, puisqu'elle ne figure dans aucun manuel courant de mécanique quantique, à notre connaissance tout au moins, il nous paraît nécessaire de donner ici une démonstration rapide de cette équation ce qui conduit d'ailleurs à un certain nombre de remarques intéressantes et fournit les notations indispensables au développement du formalisme décrivant le mouvement du fluide correspondant. Nous étudierons ensuite le mouvement de ce fluide en tenant compte des remarques physiques qui guident ce chapitre.

A.- Equation de Bopp et Haag .

Nous allons d'abord établir les équations du mouvement d'un solide dont les dimensions seront ensuite considérées comme infiniment petites (vis à vis des distances sur lesquelles le champ électromagnétique varie beaucoup), sous forme hamiltonienne, puis nous passerons à la mécanique quantique à l'aide du principe de correspondance .

Soit un solide de masse m , de charge e , et dont le tenseur d'inertie est sphérique, de moment d'inertie I . Sa position est définie par les coordonnées $x^i, i = 1, 2, 3$ ainsi que tout indice latin) de son centre de gravité et les trois angles d'Euler, χ , précession, θ nutation, ϕ rotation propre, que nous résumerons en $q^\alpha = (\chi, \theta, \phi)$ (α ainsi que tout indice grec du début de l'alphabet sera réservé aux angles) et nous poserons $q^\rho = (x^i, q^\alpha)$, ($\rho = 1 \dots 6$, ainsi que tout indice de la fin de l'alphabet grec) . La vitesse du centre de gravité est v^i , la vitesse de rotation du solide est Ω^i , liée aux $\dot{q}^\alpha$ par les formules habituelles, son moment cinétique est $s^i = I\Omega^i$, d/dt désigne la dérivée dans le mouvement, $\partial/\partial t + \dot{q}^\rho \partial/\partial q^\rho$.

Les forces exercées sur le solide sont alors dues à un champ électromagnétique $\vec{E}$, $\vec{B}$, dérivant des potentiels V et $\vec{A}$ supposés donnés . Grâce à l'hypothèse sur la dimension du solide, on peut faire un développement de la résultante des forces et du couple résultant, en prenant comme infiniment petit principal une dimension linéaire moyenne du solide . On trouve alors, dans le cas où le rapport gyromagnétique vaut 2, les équations du mouvement :

$$(49) \quad \left\{ \begin{array}{l} m \frac{d\vec{v}}{dt} = e \vec{E} + e \vec{v} \wedge \vec{B} + \frac{e}{m} s_i \text{grad } B^i \\ \frac{d\vec{s}}{dt} = \frac{e}{m} \vec{s} \wedge \vec{B} - \frac{eI}{m} \frac{d\vec{B}}{dt} \end{array} \right.$$

Le terme en $d\vec{B}/dt$, bien qu'inhabituel n'est généralement pas négligeable, lorsque $\vec{\Omega}$ n'est pas trop grand , mais disparaît naturellement en régime stationnaire, cas particulier qui est généralement considéré dans ce type de calcul .

Si l'on emploie $\vec{\sigma}$ défini par

$$(50) \quad \vec{\sigma} = \vec{s} + \frac{eI}{m} \vec{B}$$

à la place de $\vec{s}$, les équations prennent la forme :

$$(51) \quad \left\{ \begin{array}{l} m \frac{d\vec{v}}{dt} = e \vec{E} + e \vec{v} \wedge \vec{B} + \frac{e}{m} \sigma_i \text{grad } B^i - \frac{e^2 I}{2m^2} \text{grad } B^2 \\ \frac{d\vec{\sigma}}{dt} = \frac{e}{m} \vec{\sigma} \wedge \vec{B} \end{array} \right.$$

le cas usuel étant celui où le terme en $\vec{B}^2$ est négligeable .

On peut alors montrer que les équations (51) dérivent du lagrangien :

$$(52) \quad L = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{I}{2} (\dot{\phi}^2 + \dot{\theta}^2 + \dot{\chi}^2 + 2\dot{\chi}\dot{\phi} \cos \theta) - eV + e\vec{A} \cdot \vec{v} + \frac{eI}{m} \vec{\Omega} \cdot \vec{B}$$

dont on tire les moments conjugués des q^p :

$$(53) \quad p_p = m g_{p\sigma} \dot{q}^\sigma + e A_p$$

où $g_{p\sigma}$ est le tenseur métrique déduit de l'expression de l'énergie cinétique :

$$(54) \quad g_{p\sigma} \dot{q}^p \dot{q}^\sigma = v^2 + \frac{I}{m} (\dot{\phi}^2 + \dot{\theta}^2 + \dot{\chi}^2 + 2\dot{\chi}\dot{\phi} \cos \theta) = v^2 + \frac{I}{m} \vec{\Omega}^2$$

et où l'on a posé

$$(55) \quad (A_p) = (A_i, \frac{I}{m} B_\alpha)$$

avec

$$(56) \quad B_\alpha = K_\alpha^i B_i$$

où K_α^i est la matrice (α indice de ligne, i , de colonne)

$$(57) \quad (K_\alpha^i) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \cos \chi & \sin \chi & 0 \\ \sin \chi \sin \theta & -\cos \chi \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

telle que $\Omega^i = K_\alpha^i \dot{q}^\alpha$.

On déduit alors de ceci que l'hamiltonien est

$$(58) \quad H = \frac{1}{2m} g^{\rho\sigma} (p_\rho - e A_\rho) (p_\sigma - e A_\sigma) + e V$$

avec $g^{\rho\sigma} g_{\sigma\tau} = \delta_\tau^\rho$, soit explicitement,

$$(g^{\alpha\beta}) = \frac{m}{I} \begin{pmatrix} 1 / \sin^2 \theta & 0 & -\cos \theta / \sin^2 \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\cos \theta / \sin^2 \theta & 0 & 1 / \sin^2 \theta \end{pmatrix}$$

L'hamiltonien correspondant aux équations usuelles, c'est à dire (51) sans le terme en $\vec{grad} \cdot \vec{B}^2$ s'obtient en retranchant $\frac{e^2 I}{2m^2} \vec{B}^2$ à (58).

La valeur de l'hamiltonien (58) est l'énergie totale

$$H = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2I} s^2 + e V$$

que l'on calcule aisément en remarquant que

$$(59) \quad p_\alpha = K_\alpha^i \sigma_i$$

et que

$$(60) \quad \frac{I}{m} g^{\alpha\beta} K_\alpha^i K_\beta^j = \delta^{ij}$$

Lorsque $\partial V / \partial t = 0$, cette énergie est bien une constante du mouvement.

Pour écrire l'équation de mécanique ondulatoire correspondant au solide précédent, nous allons suivre une méthode identique à celle utilisée pour les systèmes de particules (voir par exemple L. de Broglie (4)). L'espace de configuration $\{q^\rho\}$ est doté de la métrique $g_{\rho\sigma}$ précédente, l'élément de volume est alors $d^6 q = \sqrt{g} dx dy \dots d\phi$, ($g = \det g_{\rho\sigma}$), le laplacien $\nabla^2 = g^{-1/2} \partial_\rho (\sqrt{g} g^{\rho\sigma} \partial_\sigma)$. La fonction d'onde de la particule est définie dans cet espace, c'est $\Psi(q^\rho, t)$,

fonction des coordonnées (x^i, χ, θ, ϕ) et du temps .

On fait alors correspondre aux grandeurs q^p les opérateurs de multiplication par q^p , et aux p_p les opérateurs différentiels $-i\hbar \partial/\partial q^p$ notés encore p_p .

L'équation d'onde est alors déduite de l'hamiltonien (58), ce qui donne :

$$(61) \quad i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \frac{1}{2m} \frac{1}{\sqrt{g}} (i\hbar \partial_p + eA_p) \left(\sqrt{g} g^{p\sigma} (i\hbar \partial_\sigma \Psi + eA_\sigma \Psi) \right) + eV \Psi$$

qui peut encore s'écrire, en utilisant les opérateurs différentiels de spin définis par

$$(62) \quad \sigma_i = (K^{-1})_i^\alpha p_\alpha$$

$$(63) \quad i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \frac{1}{2m} (\vec{p} - e\vec{A})^2 \Psi + eV \Psi + \frac{1}{2I} \vec{\sigma}^2 \Psi - \frac{e}{m} \vec{B} \cdot \vec{\sigma} \Psi + \frac{e^2 I}{2m^2} \vec{B}^2 \Psi$$

La formule (62) montre que les opérateurs de spin (nous verrons qu'ils sont également ceux employés habituellement en notation spinorielle) correspondent donc à $\vec{\sigma}$ et non à $\vec{s}$, c'est à dire que $\vec{\sigma}$ contient une partie liée au champ magnétique ; cependant , si $I \rightarrow 0$, $\vec{\sigma}$ et $\vec{s}$ se confondent . Si, au lieu des équations (51) on adopte les équations usuelles, il suffit de supprimer dans (63) le terme en $\vec{B}^2$.

Les opérateurs de spin σ_i , différentiels, vérifient les relations de commutation habituelles, en particulier, σ^2 et σ_z , par exemple, commutent . De plus, on peut voir que p_φ commute avec σ^2 et σ_z . Il est donc possible de trouver des fonctions propres communes à σ^2 , σ_z et p_φ . Elles sont bien connues et l'on sait qu'elles forment un ensemble complet de fonctions orthogonales dépendant des angles d'Euler : (voir N.Ja.Vilenkin (26)) . En développant les fonctions d'onde sur cette base, on peut faire apparaître les spineurs et les opérateurs matriciels de spin utilisés habituellement .

Supposons en effet qu'une particule soit décrite par une fonction Ψ qui soit fonction propre de σ^2 pour la valeur $3\hbar^2/4$ et de p_φ pour la valeur $\hbar/2$. Soient ϕ_0 et ϕ_1 les deux fonctions de base correspondant à ces

valeurs pour σ^2 et p_φ et, respectivement, à $\hbar/2$ et $-\hbar/2$ pour σ_z .
On a nécessairement

$$(64) \quad \Psi(\vec{x}, \chi, \theta, \phi, t) = \Psi_0(\vec{x}, t) \Phi_0(\chi, \theta, \phi) + \Psi_1(\vec{x}, t) \Phi_1(\chi, \theta, \phi)$$

On peut alors montrer que Ψ_0 et Ψ_1 forment les composantes d'un spineur et se transforment, si l'on applique σ_i , défini par (62), à Ψ , suivant les formules habituelles, à l'aide des matrices de Pauli.

Plus généralement, l'hypothèse que la fonction d'onde est fonction propre de σ^2 et p_φ , permet, dans le cas de particules de spin quelconque, de retrouver les spineurs et les opérateurs utilisés habituellement. On remarque aussi la différence suivante entre les particules de spin entier et celles de spin demi-entier : alors que les premières admettent des fonctions propres indépendantes de ϕ , les secondes en dépendent nécessairement.

En ce qui concerne les équations du mouvement, si nous posons, dans le cas de la particule de spin $\hbar/2$:

$$(65) \quad \Psi(q^\rho, t) = e^{\frac{3i\hbar}{8I}t} \left(\tilde{\Psi}_0(\vec{x}, t) \Phi_0(q^\alpha) + \tilde{\Psi}_1(\vec{x}, t) \Phi_1(q^\alpha) \right)$$

on voit que l'équation (63) peut s'écrire, en posant $\tilde{\Psi} = (\tilde{\Psi}_0, \tilde{\Psi}_1)$

$$(66) \quad i\hbar \frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial t} = \frac{1}{2m} (\vec{p} - e\vec{A})^2 \tilde{\Psi} + e V \tilde{\Psi} - \frac{e}{m} \vec{B} \cdot \vec{\sigma} \tilde{\Psi} + \frac{e^2 I}{2m^2} \vec{B}^2 \tilde{\Psi}$$

où $\vec{\sigma}_i$ sont les matrices de Pauli. Cette équation coïncide alors avec l'équation de Pauli si l'on néglige le terme en $\vec{B}^2$, comme précédemment, ou encore, si l'on fait tendre I vers 0, ce qui est possible ici, grâce à (65), parce que l'on a supposé que la particule est dans un état propre pour σ^2 ce qui permet d'éliminer (parce qu'en fait il est constant) le terme d'énergie cinétique qui tendait vers l'infini. Une démarche analogue (voir l'appendice 1) est également possible en mécanique classique : en utilisant le fait que σ^2 et p_φ sont des intégrales premières des équations (51), on peut retrouver à partir de l'hamiltonien (58) celui utilisé habituellement à propos de spin (voir par exemple W. Pauli (19)) et qui conduit, avec les difficultés et le moyen de les éviter que l'on sait à l'équation de Pauli.

Il faut remarquer que cette formulation de la mécanique ondulatoire du point à spin, plus générale parce que $I \neq 0$, permet d'envisager des états où le module du spin n'est pas valeur propre, et surtout, grâce par exemple au terme en $\vec{B}^2$, de supposer qu'une même particule puisse passer d'une valeur du spin à une autre par une transition analogue à celle qui permet le passage d'un état lié d'un électron autour du noyau à un autre niveau d'énergie.

B.-Interprétation hydronamique.

Nous allons maintenant, à l'aide de la méthode de Madelung, donner une interprétation fluide à l'équation de Bopp et Haag (63), mais pour cela il faut d'abord définir le type de fluide à spin que nous utiliserons.

Ce fluide peut être défini comme la limite d'un ensemble de petits solides sphériques du type de celui du paragraphe précédent. En variables de Lagrange, chaque point du fluide est repéré par 6 nombres α^p , correspondant aux 6 degrés de liberté du solide. Une telle généralité, qui peut paraître excessive, est cependant nécessaire, comme nous le verrons par la suite.

Le mouvement du fluide est alors défini par l'ensemble des trajectoires $q^p(\alpha^\sigma, t)$ de chacun de ses points, de position $x^i(\alpha^\sigma, t)$ et d'orientation $q^\alpha(\alpha^\sigma, t)$. L'espace de configuration est l'ensemble des applications $R^6 \rightarrow R^6$: $\alpha^\sigma \mapsto q^p(\alpha^\sigma)$. Les vitesses sont $\dot{q}^p = \partial q^p(\alpha^\sigma, t) / \partial t$ que nous noterons également v^p , $v^i = \dot{x}^i$ étant la vitesse de translation et Ω^i la vitesse de rotation propre, liée aux v^α par les formules habituelles. La densité de masse $\mu_\alpha(\alpha^p)$ est supposée indépendante du temps, ainsi que la densité de charge $\rho_\alpha(\alpha^p) = \frac{e}{m} \mu_\alpha$, $\frac{e}{m}$ étant une constante.

En variables d'Euler, que nous emploierons dans tous les calculs, le mouvement est défini par la donnée du champ des vitesses $v^p(q^\sigma, t) = \dot{q}^p(\alpha^\sigma, t)$ dans l'espace $\mathcal{Q}$ des q^p , et par la densité de masse $\mu(q^\sigma; t)$ telle que la masse du fluide correspondant à l'élément de volume de $\mathcal{Q}$, $d^6q = \sqrt{g} dq^1 \dots dq^6$ ($g_{p\sigma}$ étant donné toujours par (54)) soit $dm = \mu d^6q$. Nous aurons également besoin de la densité "spatiale" de masse dans l'espace des positions x^i du centre de gravité, qui est :

$$\mu_x(x^i, t) = \int \mu(q^p, t) d\alpha$$

où $d\alpha = \sqrt{g} d\chi d\theta d\phi$ est l'élément de volume dans l'espace des angles d'Euler. Nous réserverons les notations de l'analyse vectorielle à l'espace physique (celui des positions x^i de chaque point), ce qui donne, par exemple, $g\vec{rad} = (\partial/\partial x^i)$, et n'emploierons pour $\mathcal{Q}$ que les notations tensorielles extrinsèques.

La conservation de la masse, dans tout déplacement $\delta q^p(q^\sigma)$ du fluide se traduit par :

$$(67) \quad \partial\mu + \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_p (\sqrt{g} \mu \delta q^p) = 0$$

où ∂ représente comme précédemment la variation en place (à q^p constants), liée à la variation totale dans le déplacement δ (à α^p constants) par

$$\delta = \partial + \delta q^p \partial/\partial q^p$$

La densité massique de spin est $\vec{s} = \frac{I}{m} \vec{\Omega}$

Les équations du mouvement du fluide correspondant à l'équation de Bopp et Haag, sont alors la généralisation au cas continu des équations du point à spin, avec cependant un terme supplémentaire, de type quantique, agissant à la fois sur les variables de position et les variables angulaires, et qui dérive du potentiel quantique

$$(68) \quad Q = \frac{\hbar^2}{2m^2} \frac{\nabla^2 \sqrt{\mu}}{\sqrt{\mu}}$$

Nous poserons

$$(69) \quad \gamma_i = (K^{-1})_i^\alpha \partial_\alpha Q$$

Dans le cas où le rapport gyromagnétique vaut 2, les équations du mouvement sont alors

$$(70) \quad \begin{cases} \mu \frac{d\vec{v}}{dt} = \rho \vec{E} + \rho \vec{v} \wedge \vec{B} + \mu \text{grad } Q + \frac{e}{m} \mu s^i \text{grad } B_i \\ \frac{d\vec{s}}{dt} = \frac{e}{m} \vec{s} \wedge \vec{B} - \frac{eI}{m} \frac{d\vec{B}}{dt} + \vec{\gamma} \end{cases}$$

et l'on a le résultat suivant :

Le mouvement du fluide à spin ainsi défini peut se déduire, les variables canoniques étant q^p et les moments associés*

$$(71) \quad p_p = g_{p\sigma} v^\sigma + \frac{e}{m} A_p$$

de l'hamiltonien

$$(72) \quad H = \int \frac{1}{2} \mu g^{\rho\sigma} (p_\rho - \frac{e}{m} A_\rho) (p_\sigma - \frac{e}{m} A_\sigma) d^6q + \int (\rho V - \mu Q) d^6q$$

et des équations canoniques, résumées dans l'égalité des différentielles :

$$(73) \quad \delta H = \int \mu \left(\delta p_\rho v^\rho - \frac{dp_\rho}{dt} \delta q^\rho \right) d^6q$$

Ces équations canoniques sont, d'une part (71) et de l'autre :

$$(74) \quad \frac{dp_\rho}{dt} = - \frac{1}{2} \frac{\partial g^{\sigma\tau}}{\partial q^\rho} (p_\sigma - \frac{e}{m} A_\sigma) (p_\tau - \frac{e}{m} A_\tau) + \frac{e}{m} g^{\sigma\tau} (p_\sigma - \frac{e}{m} A_\sigma) \frac{\partial A_\tau}{\partial q^\rho} \\ + \frac{\partial Q}{\partial q^\rho} - \frac{e}{m} \frac{\partial V}{\partial q^\rho}$$

équivalentes à (70), compte tenu de (71) .

Démonstration : nous allons d'abord montrer que l'on trouve (74) et (71) à partir de (72) et (73) en calculant δH :

$$\delta H = \int \frac{1}{2} \mu \partial_\tau g^{\rho\sigma} \delta q^\tau (p_\rho - \frac{e}{m} A_\rho) (p_\sigma - \frac{e}{m} A_\sigma) d^6q + \int \rho \partial_\tau V \delta q^\tau d^6q \\ + \int \mu g^{\rho\sigma} (p_\rho - \frac{e}{m} A_\rho) \left(\delta p_\sigma - \frac{e}{m} \partial_\tau A_\sigma \delta q^\tau \right) d^6q - \delta \int \mu Q d^6q$$

* Où A_p est donné toujours par (55)

Le dernier terme vaut, grâce à (68) :

$$\begin{aligned}
 - \delta \int \mu Q d^6 q &= - \delta \int \mu \frac{\hbar^2}{2m^2} \frac{\nabla^2 \sqrt{\mu}}{\sqrt{\mu}} d^6 q = \frac{\hbar^2}{2m^2} \delta \int g^{\rho\sigma} \partial_\rho \sqrt{\mu} \partial_\sigma \sqrt{\mu} d^6 q \\
 &= \frac{\hbar^2}{2m^2} 2 \int g^{\rho\sigma} \partial_\rho \sqrt{\mu} \partial_\sigma \sqrt{\mu} d^6 q = \frac{\hbar^2}{m^2} \int \nabla^2 \sqrt{\mu} \partial \sqrt{\mu} d^6 q \\
 &= - \frac{\hbar^2}{2m^2} \int \partial_\mu \frac{\nabla^2 \sqrt{\mu}}{\sqrt{\mu}} d^6 q
 \end{aligned}$$

or l'équation (67) donne ∂_μ , d'où

$$\begin{aligned}
 - \delta \int \mu Q d^6 q &= - \frac{\hbar^2}{2m^2} \int \mu \partial_\rho \left(\frac{\nabla^2 \sqrt{\mu}}{\sqrt{\mu}} \right) \delta q^\rho d^6 q \\
 &= - \int \mu \partial_\tau Q \delta q^\tau d^6 q
 \end{aligned}$$

on a donc

$$\begin{aligned}
 \delta H &= \int \mu g^{\rho\sigma} \left(p_\rho - \frac{e}{m} A_\rho \right) \delta p_\sigma d^6 q + \int \mu \left(\frac{1}{2} \partial_\tau g^{\rho\sigma} \left(p_\rho - \frac{e}{m} A_\rho \right) \left(p_\sigma - \frac{e}{m} A_\sigma \right) \right. \\
 &\quad \left. - \frac{e}{m} g^{\rho\sigma} \left(p_\rho - \frac{e}{m} A_\rho \right) \partial_\tau A_\sigma + \frac{e}{m} \partial_\tau V - \partial_\tau Q \right) \delta q^\tau d^6 q
 \end{aligned}$$

En égalant à (73), le coefficient de δp_σ donne (71) et celui de δq^τ , (74).

Il reste à montrer que (74) est bien équivalente à (70).

Considérons d'abord les composantes de position, alors $g^{ij} = \delta^{ij}$ et l'on a

$$\frac{dp_i}{dt} = \frac{e}{m} \left(p_j - \frac{e}{m} A_j \right) \partial_i A_j + \frac{e}{m} g^{\alpha\beta} \left(p_\alpha - \frac{e}{m} A_\alpha \right) \partial_i A_\beta + \partial_i Q - \frac{e}{m} \partial_i V$$

ce qui s'écrit, compte tenu de (71)

$$\frac{d}{dt} \left(v_i + \frac{e}{m} A_i \right) = \frac{e}{m} \partial_i A_j v^j + \frac{e}{m} v^\beta \partial_i A_\beta - \frac{e}{m} \partial_i V + \partial_i Q$$

$$\text{Or, } \frac{e}{m} v^\beta \partial_i A_\beta = \frac{e}{m} g^{\beta\gamma} K_\gamma^k s_k \partial_i \left(\frac{1}{m} K_\beta^j B_j \right)$$

en utilisant les définitions de $s^i = \frac{I}{m} \Omega^i = \frac{I}{m} K_\alpha^i v^\alpha$, $B_\alpha = K_\alpha^i B_i$.

Le fait, déjà signalé, que

$$\frac{I}{m} g^{\beta\gamma} K_\beta^j K_\gamma^k = \delta^{jk}$$

entraîne que

$$\frac{e}{m} v^\beta \partial_i A_\beta = \frac{e}{m} s^j \partial_i B_j.$$

Ceci permet d'écrire l'équation du mouvement de translation, en utilisant les champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$, sous la forme

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{e}{m} \vec{E} + \frac{e}{m} \vec{v} \wedge \vec{B} + g \vec{\text{grad}} Q + \frac{e}{m} s^i g \vec{\text{grad}} B_i$$

et, en multipliant par μ on retrouve bien la première équation (70).

En ce qui concerne la partie angulaire, elle s'écrit :

$$\frac{dp_r}{dt} = -\frac{1}{2} \partial_r g^{\alpha\beta} (p_\alpha - \frac{e}{m} A_\alpha) (p_\beta - \frac{e}{m} A_\beta) + \frac{e}{m} g^{\alpha\beta} (p_\alpha - \frac{e}{m} A_\alpha) \partial_r A_\beta + \partial_r Q$$

En utilisant la définition (71) des moments, il vient :

$$\frac{d}{dt} (g_{r\delta} v^\delta + \frac{e}{m} A_r) = -\frac{1}{2} \partial_r g^{\alpha\beta} g_{\alpha\delta} v^\delta g_{\beta\epsilon} v^\epsilon + \frac{e}{m} v^\beta \partial_r A_\beta + \partial_r Q$$

Or, $g^{\alpha\beta} g_{\alpha\delta} = \delta_\delta^\beta$ d'où $\partial_r g^{\alpha\beta} g_{\alpha\delta} + g^{\alpha\beta} \partial_r g_{\alpha\delta} = 0$, ce qui montre que le premier

terme du second membre est :

$$\frac{1}{2} g^{\alpha\beta} g_{\beta\epsilon} \partial_r g_{\alpha\delta} v^\delta v^\epsilon = \frac{1}{2} \partial_r g_{\alpha\beta} v^\alpha v^\beta$$

et l'équation devient :

$$\partial_\epsilon g_{r\delta} v^\epsilon v^\delta + g_{r\delta} \frac{dv^\delta}{dt} - \frac{1}{2} \partial_r g_{\alpha\beta} v^\alpha v^\beta = \frac{e}{m} v^\beta \partial_r A_\beta - \frac{e}{m} \frac{dA_r}{dt} + \partial_r Q$$

En écrivant les formules développées, on peut alors voir que le premier membre est $K_\gamma^i ds_i/dt$ et le second

$$K_r^i \left(\frac{e}{m} \varepsilon_{ijk} s^j B^k - \frac{eI}{m^2} \frac{dB_i}{dt} + \gamma_i \right) ,$$

ce qui termine la démonstration, (ε_{ijk} étant le tenseur unité complètement anti-symétrique) .

Posons $\Psi = f \exp(\frac{im}{\hbar} S)$ dans l'équation de Bopp et Haag (61) ; en séparant les parties réelle et imaginaire, on trouve aisément les deux équations, de continuité pour la partie imaginaire, de Jacobi pour la partie réelle :

$$(75) \quad \frac{\partial(f^2)}{\partial t} + \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_\rho \left(\sqrt{g} g^{\rho\sigma} f^2 (\partial_\sigma S - \frac{e}{m} A_\sigma) \right) = 0$$

$$(76) \quad \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2} g^{\rho\sigma} (\partial_\rho S - \frac{e}{m} A_\rho) (\partial_\sigma S - \frac{e}{m} A_\sigma) + \frac{e}{m} V - \frac{\hbar^2}{2m^2} \frac{\nabla^2 f}{f} = 0$$

On voit que (75) coïncide alors avec l'équation (67) de continuité du fluide, à condition de poser :

$$(77) \quad \mu = f^2, \quad v^\rho = g^{\rho\sigma} (\partial_\sigma S - \frac{e}{m} A_\sigma) \iff p_\rho = \partial_\rho S$$

Ce qui permet, en accord avec l'interprétation hydrodynamique de la mécanique ondulatoire, de considérer (avec $d\alpha = \sqrt{g} d\chi d\theta d\phi$)

$$\mu_x = \int \mu d\alpha = \int \bar{\Psi} \Psi d\alpha$$

qui vaut, dans le cas où l'équation de Pauli est valable, $\bar{\Psi}_0 \Psi + \bar{\Psi}_1 \Psi$, densité de probabilité de présence, comme la densité de masse du fluide à spin dans l'espace physique réel .

Compte tenu de (77), on a, en dérivant (76) par rapport à q^τ :

$$\begin{aligned} \partial_t \partial_\tau S + v^\sigma \partial_\sigma \partial_\tau S = & -\frac{1}{2} \partial_\tau g^{\rho\sigma} (\partial_\rho S - \frac{e}{m} A_\rho) (\partial_\sigma S - \frac{e}{m} A_\sigma) + \frac{e}{m} g^{\rho\sigma} (\partial_\rho S - \frac{e}{m} A_\rho) \partial_\tau A_\sigma \\ & - \frac{e}{m} \partial_\tau V + \partial_\tau Q \end{aligned}$$

qui est bien (74), équation du mouvement en variables canoniques . Le procédé de

Madelung permet donc de donner une interprétation fluide à l'équation générale des particules à spin, sous sa forme scalaire, telle qu'elle a été donnée par F.Bopp et R.Haag.

C.- Mouvement avec champ électromagnétique interne .

Soit $\vec{E}$ et $\vec{B}$ le champ électromagnétique créé par le fluide ; le mouvement du fluide quantique est alors décrit par les équations suivantes (en ce qui concerne les hypothèses lorsque $1/c$ est très petit, voir les remarques faites à propos de l'équation de Schrödinger) :

$$(78) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mu \frac{d\vec{v}}{dt} = \rho(\vec{E} + \vec{E}) + \rho\vec{v} \wedge (\vec{B} + \vec{B}) + \mu g \vec{r} \text{ad} Q - \mu g \vec{r} \text{ad} G + \frac{e}{m} \mu s^i g \vec{r} \text{ad} (B_i + B_i) \\ \frac{d\vec{s}}{dt} = \frac{e}{m} \vec{s} \wedge (\vec{B} + \vec{B}) - \frac{eI}{m^2} \frac{d(\vec{B} + \vec{B})}{dt} + \gamma \end{array} \right.$$

où nous avons ajouté le terme de cohésion G déjà utilisé (équation (42)) pour l'équation de Schrödinger et qui reste défini ici à partir de la densité de masse dans l'espace physique réel, donc n'intervient pas dans l'équation du spin (on pourrait d'ailleurs généraliser) .

Comme la présence du spin crée une densité d'aimantation égale à la densité de moment magnétique, les équations de Maxwell du champ interne sont, en posant $d\alpha = \sqrt{g} d\chi d\theta d\phi$:

$$(79) \quad \left\{ \begin{array}{l} \vec{rot} \left(\frac{\vec{B}}{\mu_0} - \int \rho \vec{s} d\alpha \right) = \int \rho \vec{v} d\alpha + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \\ \text{div } \vec{D} = \int \rho d\alpha \quad , \quad \text{où} \quad \vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} \end{array} \right.$$

formules définies dans l'espace physique et qui font donc intervenir les densités spatiales de charge, de courant et de spin .

Comme précédemment, nous considérons le champ interne comme une variable indépendante, au même titre que celles décrivant le fluide, de sorte que les équations d'évolution du système complet sont les deux groupes d'équations (78) et (79) . Cette évolution est alors hamiltonienne comme le montre le résultat suivant .

Les équations du mouvement du système global fluide et champ interne, (78) et (79), sont équivalentes, en variables conjuguées q^p , p_p , A^i , $-D_i$, ϕ où

$$(80) \quad p_p = g_{p\sigma} v^\sigma + \frac{e}{m} (A_p + A_\rho)$$

aux équations déduites de l'hamiltonien

$$(81) \quad H = \int \left[\frac{1}{2} \mu g^{\rho\sigma} \left\{ p_\rho - \frac{e}{m} (A_\rho + A_\sigma) \right\} \left\{ p_\sigma - \frac{e}{m} (A_\sigma + A_\rho) \right\} + \rho (V + \phi) + \frac{1}{2} \mu G - \mu Q \right] d^6 q \\ + \int \left(\frac{\vec{D}^2}{2\epsilon_0} + \frac{(\text{rot} \vec{A})^2}{2\mu_0} + \vec{D} \cdot g \vec{r} d\phi \right) d^3 x$$

($d^3 x = dx dy dz$), et de l'égalité des différentielles :

$$(82) \quad \delta H = \int \mu (\delta p_\rho v^\rho - \delta q^\rho \frac{dp_\rho}{dt}) d^6 q + \int \left(-\partial \vec{D} \cdot \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \partial \vec{A} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) d^3 x$$

qui sont (80) et l'équation du mouvement du fluide en variables canoniques :

$$(83) \quad \frac{dp_\rho}{dt} = - \frac{1}{2} \partial_\rho g^{\sigma\tau} \left(p_\sigma - \frac{e}{m} (A_\sigma + A_\tau) \right) \left(p_\tau - \frac{e}{m} (A_\tau + A_\sigma) \right) + \\ \frac{e}{m} g^{\sigma\tau} \left(p_\sigma - \frac{e}{m} (A_\sigma + A_\tau) \right) \partial_\rho (A_\tau + A_\sigma) + \partial_\rho Q - \partial_\rho G - \frac{e}{m} \partial_\rho (V + \phi)$$

Démonstration ; le calcul est, en ce qui concerne le fluide presque identique au cas précédent, en remplaçant partout $\vec{A}$, V par $\vec{A} + \vec{\tilde{A}}$, $V + \tilde{V}$. Le seul terme nouveau est

$$\int \frac{1}{2} \mu G d^6 q = \frac{1}{2} \iint \mu(q^\rho) \mu(\tilde{q}^\rho) g(|\vec{x} - \vec{\tilde{x}}|) d^6 q d^6 \tilde{q}$$

dont la variation est

$$\delta \int \frac{1}{2} \mu G d^6 q = \iint \mu(q^\rho) \mu(\tilde{q}^\rho) \partial_\rho g \delta q^\rho d^6 q d^6 \tilde{q}$$

puisque $\delta(\mu d^6 q) = 0$ et qu'il y a symétrie entre $\vec{x}$ et $\vec{\tilde{x}}$. Ceci donne bien

$$\int \mu(q^\rho) \frac{\partial G}{\partial q^\rho} \delta q^\rho d^6 q$$

d'où le terme correspondant dans (83) et celui de (78) en remarquant qu'en fait,

G ne dépend que de x^i .

Les termes de δH dus aux variations du champ seul sont, eu égard aux calculs déjà faits dans les démonstrations similaires :

$$(84) \quad \int \left\{ \mu g^{\rho\sigma} \left(p_\rho - \frac{e}{m} (A_\rho + A_\rho) \right) \frac{-e}{m} \partial A_\sigma + \rho \partial \phi \right\} d^6 q \\ + \int \left(\partial \vec{D} \cdot \vec{E} + \text{rot} \vec{H} \cdot \partial \vec{A} + \partial \vec{D} \cdot \text{grad} \phi - \text{div} \vec{D} \partial \phi \right) d^3 x$$

Le premier terme s'écrit encore, en tenant compte de la définition (80) des moments :

$$- \int \rho \left(v^i \partial A_i + v^\alpha \frac{I}{m} K_\alpha^i \partial B_i \right) d^6 q + \int \rho \partial \phi d^6 q \\ \text{Or} \quad \int \rho v^\alpha \frac{I}{m} K_\alpha^i \partial B_i d^6 q = \int \rho s_i \partial B^i d^6 q = \int \rho \vec{s} \cdot \partial (\text{rot} \vec{A}) d^6 q \\ = \int (\int \rho \vec{s} d\alpha) \text{rot} \partial \vec{A} d^3 x \\ = \int \text{rot} (\int \rho \vec{s} d\alpha) \cdot \partial \vec{A} d^3 x$$

et l'expression (84) s'écrit donc

$$- \int (\int \rho \vec{v} d\alpha + \text{rot} \int \rho \vec{s} d\alpha) \cdot \partial \vec{A} d^3 x + \int (\int \rho d\alpha) \partial \phi d^3 x \\ + \int \left((\vec{E} + \text{grad} \phi) \cdot \partial \vec{D} + \text{rot} \vec{H} \cdot \partial \vec{A} - \text{div} \vec{D} \partial \phi \right) d^3 x$$

En égalant ceci à la deuxième intégrale de (82), le terme en $\partial \vec{D}$ donne l'équation de définition de $\vec{E}$, comme précédemment, le terme en $\partial \phi$ l'équation $\text{div} \vec{D} = \int \rho d\alpha$, le terme en $\partial \vec{A}$ la première équation (79).

La valeur de l'hamiltonien est alors grâce à (54), l'énergie totale du système :

$$(85) \quad W = \int \left(\frac{1}{2} \mu v^2 + \frac{1}{2} \mu \frac{m}{I} s^2 - \mu Q + \frac{1}{2} \mu G + \rho V \right) d^6 q + \int \frac{\epsilon_0 E^2 + \mu_0 H^2}{2} d^3 x$$

et c'est une constante du mouvement lorsque $\partial V / \partial t = 0$.

Le fait d'avoir pu mettre le mouvement sous forme hamiltonienne montre qu'ici aussi il existe une 2-forme invariante :

$$(86) \quad \omega = \int \mu \, \delta p_p \wedge \delta q^p \, d^6 q - \int \partial D_i \wedge \partial A^i \, d^3 x$$

Pour les mêmes raisons que précédemment, chacun des termes n'est en général pas invariant, ce qui entraîne les mêmes conséquences physiques que pour les autres types de fluides étudiés ici .

C H A P I T R E I V

PARTICULES DANS UN CHAMP FAIBLE : EQUATION DE

LORENTZ ET THEOREME DE LIOUVILLE

Dans ce chapitre, nous nous occuperons surtout du modèle d'électron de Lorentz, considéré comme un cas limite des fluides quantiques précédents . Sa relative simplicité nous permettra de pousser plus loin l'étude du mouvement . En outre, cela fournira un exemple à ce que nous avons dit au chapitre II sur l'équivalence entre la mécanique héréditaire et les systèmes à champs internes .

Dans le cas où les particules sont soumises à des champs faibles et variant peu, l'expérience montre que l'on peut les considérer comme peu étendues, c'est le cas quasi-classique de la mécanique ondulatoire usuelle . Ceci conduit à adopter avec F.Fer (voir (9)) le point de vue **suivant** sur la complémentarité : le caractère ondulatoire est prédominant lors des interactions des particules étendues avec des champs forts qui réussissent à contrecarrer l'action des forces de cohésion, mais, *dès que le champ externe est assez faible, elles se condensent à nouveau* en un petit volume et peuvent souvent être assimilées à des points

matériels, ou, ce qui revient au même, leur mouvement est suffisamment bien décrit par celui de leur centre de gravité .

Du point de vue relativiste, cette cohésion implique que nous étudions le mouvement dans un référentiel proche du référentiel propre du centre de gravité de la particule, car on sait qu'en toute rigueur, un mouvement d'ensemble a peu de signification physique en relativité car il dépend du référentiel choisi .

Cette hypothèse de mouvement d'ensemble d'un petit corpuscule correspond au modèle d'électron de Lorentz utilisé dans le calcul de la force de freinage de rayonnement . Aussi retrouverons-nous l'équation de Lorentz comme approximation de celle que nous étudierons ici . En effet, on a vu précédemment que la mécanique des particules dans leur propre champ électromagnétique était une mécanique héréditaire et ce caractère va se répercuter tel quel sur le mouvement du centre de gravité ; c'est d'ailleurs aussi le cas dans le modèle d'électron de Lorentz, si l'on ne fait pas le développement en $1/c$. Nous allons donc considérer ici une équation héréditaire généralisant l'équation de Lorentz.

Bien que paraissant compliquer l'étude, nous allons montrer que ce point de vue * permet d'échapper à presque toutes les difficultés soulevées par l'équation de Lorentz, en particulier le problème des solutions "divergentes" et celui de la condition supplémentaire sur $\vec{\gamma}$, déterminée par le comportement du système pour t infini (voir G.N.Plass (21) et H.Arzeliers (1)). Nous donnerons alors, soit par des méthodes héréditaires, soit à l'aide de la théorie hamiltonienne avec champs internes, quelques propriétés du mouvement, ainsi qu'une évaluation de la variation de volume dans l'espace des phases de la particule et montrerons, conformément à l'un des buts de ce travail, que le théorème de Liouville n'est plus vrai si l'on tient compte du retard de propagation des champs électromagnétiques .

Enfin, nous verrons comment le formalisme fluide développé précédemment se transcrit ici et permet de traiter la variation de volume dans l'espace des phases d'un ensemble de particules relativistes en interaction, à l'approximation des champs faibles, c'est à dire lorsque les particules sont presque ponctuelles, et montrerons que cette variation, non nulle en général, est d'ordre $1/c^2$, c'est à dire que l'on peut l'interpréter comme un effet relativiste .

* ainsi d'ailleurs que toutes les théories héréditaires de l'équation de Lorentz (voir H.Arzeliers (1)) .

I.- ELECTRON DE LORENTZ .

Nous considérerons d'abord, à titre d'introduction, la limite où la particule étendue qui obéissait à l'équation de Schrödinger avec champs électromagnétiques retardés, est condensée en un petit volume . Ceci fait que son mouvement peut être assimilé à celui d'un petit solide, identique alors à l'électron rigide de Lorentz . Nous verrons ensuite la généralisation d'un tel mouvement au cas relativiste .

A.- Equations du mouvement .

Nous partons des équations (40) et (41) du chapitre III, avec les mêmes notations :

$$(1) \quad \mu \frac{dv^i}{dt} = \partial_j \Theta^{ij} - \mu \partial^i G + \rho (E^i + E^i) + \rho \varepsilon^{ijk} v_j (B_k + B_k)$$

$$(2) \quad \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = -\rho \vec{v} + \text{rot} \vec{H}, \quad \text{div} \vec{D} = \rho$$

où Θ^{ij} est le tenseur des contraintes quantique, donné par III (1) avec $f = \sqrt{\mu}$

Le mouvement du centre de gravité d'un tel fluide, de coordonnées

$$X^i = \frac{1}{m} \int \mu(x) x^i d\bar{\omega}$$

dont la vitesse $\dot{\vec{X}}$ et l'accélération $\ddot{\vec{X}}$ sont, d'après l'équation de conservation de la masse :

$$\dot{\vec{X}} = \frac{1}{m} \frac{d}{dt} \int \mu(x) \vec{x} d\bar{\omega} = \frac{1}{m} \int \mu \vec{v} d\bar{\omega}, \quad \ddot{\vec{X}} = \frac{1}{m} \int \mu \frac{d\vec{v}}{dt} d\bar{\omega}$$

est donné par les équations

$$(3) \quad m \ddot{\vec{X}} = \int \left(\rho (\vec{E} + \vec{E}) + \rho \vec{v} \wedge (\vec{B} + \vec{B}) \right) d\bar{\omega}$$

En effet, sommons (1) sur tout l'espace, il vient

$$\frac{d}{dt} \int \mu \vec{v} d\omega = \int \text{div } \vec{\Theta} d\omega - \int \mu g \vec{\text{grad}} G d\omega + \int \rho (\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}) d\omega + \int \rho (\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}) d\omega$$

Le premier terme est nul car Θ^{ij} étant lié à la densité de masse est nul à l'infini, le deuxième terme l'est aussi par symétrie puisque G est donné par (42) du chapitre III, analogue au potentiel électrostatique. Il reste donc (3).

On voit alors que les équations (3) ne sont pas solubles séparément, puisqu'il y intervient la densité μ donnée par l'équation de conservation de la masse qui dépend du champ des vitesses $\vec{v}(\vec{x}, t)$, et $\vec{v}(\vec{x}, t)$ elle-même. Cependant, dans les cas où le mouvement du centre de gravité a un sens physique, c'est à dire lorsque l'électron est condensé et se meut sensiblement en bloc, l'équation (3) peut se suffire à elle-même moyennant quelques hypothèses que nous allons étudier maintenant.

Tout d'abord, il faut que le champ externe varie peu sur l'étendue de l'électron, sinon les forces exercées en différents points de celui-ci seraient si différentes qu'elles entraîneraient des variations de vitesse à l'intérieur non négligeables. La résultante des forces dues au champ externe se met alors sous la forme $e\vec{E} + e\vec{X} \wedge \vec{B}(\vec{X})$.

D'autre part, pour que le concept de cohésion garde son sens, au moins approximativement en théorie de la relativité, il faut que le référentiel propre de la particule varie peu c'est à dire que l'accélération de celle-ci reste faible et donc que les forces externes soient peu importantes.

Ces hypothèses étant supposées remplies, considérons, en généralisant un peu le modèle précédent, le mouvement relativiste d'un corps en mouvement d'ensemble dans le référentiel que nous utilisons.

Sa densité de charge, dans ce référentiel est donc de la forme :

$$(4) \quad \rho^*(\vec{\xi}, t) = f(\vec{\xi} - \vec{x}(t))$$

$\vec{x}(t)$ étant la position d'un point donné de ce corps, par exemple son centre de gravité et f une fonction donnée, invariable. En écrivant comme d'habitude

$$\dot{\vec{x}} = \vec{v} \quad , \quad u^0 = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \quad , \quad u^i = u^0 v^i$$

et m étant la masse propre de ce corps et e sa charge, μ sa densité propre de masse propre, ρ sa densité propre de charge telles que

$$\mu^* = \mu u^0 \text{ et } \rho^* = \rho u^0, \text{ on a (} d\omega = d^3\xi \text{) :}$$

$$m = \int \mu^* d\omega \quad e = \int \rho^* d\omega$$

Nous poserons $\rho^*/\mu^* = e/m$

Les équations du mouvement sont alors

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} a.- \quad m \frac{d\vec{u}}{dt} = e\vec{E} + e\vec{v} \wedge \vec{B} + \int \rho^* (\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}) d\omega \\ b.- \quad \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = -\rho^* \vec{v} + \text{rot } \vec{H} \quad , \quad \text{div } \vec{D} = \rho^* \end{array} \right.$$

où $\vec{D}$ et $\vec{H}$ sont liés aux potentiels ϕ et $\vec{A}$ par les équations usuelles :

$$(6) \quad \vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} = -\epsilon_0 \text{grad} \phi - \epsilon_0 \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad , \quad \vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} = \frac{1}{\mu_0} \text{rot } \vec{A}$$

Il faut remarquer que ces équations, généralisant les équations (3) ci-dessus, ne peuvent être déduites de l'équation de Klein-Gordon du fluide quantique avec champs internes à cause des difficultés déjà signalées dans la définition d'un centre de gravité en mécanique relativiste.

Nous allons voir sur cet exemple qu'il est possible, conformément à ce que nous avons montré au chapitre II, d'utiliser deux méthodes pour étudier le mouvement du système : d'une part la mécanique hamiltonienne à condition de considérer les champs électromagnétiques internes comme des variables indépendantes, d'autre part la mécanique héréditaire, et quelles conséquences on peut en tirer.

B.- Mécanique hamiltonienne .

En raisonnant de manière analogue à ce qui a été fait au chapitre précédent pour les équations (23) à (27), on peut voir que les équations (5) se déduisent d'un formalisme hamiltonien . En effet, prenons comme variables conjuguées :

$$(7) \begin{cases} x^i & \text{et} & p_i(\xi) = \mu^*(\xi) u_i + \rho^*(\xi) A_i(x) + \rho^*(\xi) A_i(\xi) \\ A^i(\xi) & \text{et} & -D_i(\xi) \\ \phi(\xi) \end{cases}$$

L'hamiltonien étant :

$$(8) \quad H = \mu u^0 c^2 + eV(x) + \int \rho^*(\xi) \phi(\xi) d\bar{\omega} + \int \left(\frac{D^2}{2\epsilon_0} + \frac{(\text{rot}\vec{A})^2}{2\mu_0} + \vec{D} \cdot \text{grad}\phi \right) d\bar{\omega}$$

les équations (5) sont équivalentes aux équations canoniques, déduites de l'égalité des différentielles :

$$(9) \quad \delta H = v^i \delta \int p_i(\xi) d\bar{\omega} - \delta x^i \frac{d}{dt} \int p_i(\xi) d\bar{\omega} + \int \left(-\partial \vec{D} \cdot \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot \partial \vec{A} \right) d\bar{\omega}$$

où il faut remarquer que, ni v^i ni δx^i ne dépendent du point courant ξ puisqu'ils sont relatifs au mouvement d'ensemble, et que u^0 est exprimé en fonction des variables conjuguées (7) .

Démonstration : là encore nous utiliserons u^i au lieu de p^i comme variable indépendante et il faudra retrouver, à la place du premier groupe (7) qui définit alors le lien entre p_i et u^i , la relation $u^i = u^0 v^i$, comme conséquence des équations canoniques .

$$\text{On a } \delta u^0 = \delta (1 + u^2/c^2)^{1/2} = \frac{u_i \delta u^i}{u^0 c^2} \quad \text{par définition de } u^0$$

En tenant compte de la conservation de la charge $\delta(\rho^* d\bar{\omega})=0$, et des calculs analogues déjà faits, il vient alors

$$\delta H = \frac{mu^i}{u^0} \delta u_i + e \frac{\partial V}{\partial x^i} \delta x^i + \int \rho^*(\xi) \frac{\partial \phi}{\partial \xi^i} d\bar{\omega} \delta x^i + \int (\rho^* - \text{div} \vec{D}) \partial \phi d\bar{\omega} \\ + \int \left(\frac{\vec{D}}{\epsilon_0} + \text{grad} \phi \right) \cdot \partial \vec{D} d\bar{\omega} + \int \frac{\text{rot}(\text{rot} \vec{A})}{\mu_0} \cdot \partial \vec{A} d\bar{\omega}$$

D'autre part, l'équation (9) donne

$$\delta H = v^i (m \delta u_i + e \frac{\partial A_i}{\partial x^j} \delta x^j + \int \rho^*(\xi) \frac{\partial A_i}{\partial \xi^j} d\bar{\omega} \delta x^j + \int \rho^* \partial A^i d\bar{\omega} \\ - (m \frac{du_i}{dt} + e \frac{\partial A_i}{\partial x^j} v^j + e \frac{\partial A_i}{\partial t} + \int \rho^* \frac{\partial A_i}{\partial \xi^j} d\bar{\omega} v^j + \int \rho^* \frac{\partial A_i}{\partial t} d\bar{\omega}) \delta x^i \\ + \int (-\partial \vec{D} \cdot \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot \partial \vec{A}) d\bar{\omega}$$

En égalant les coefficients des différentielles indépendantes de chacune de ces expressions, il vient pour δu^i :

$$m \frac{u^i}{u^0} = m v^i \text{ soit } u^i = u^0 v^i, \text{ relation cherchée ; pour } \partial \vec{D},$$

l'équation de définition de $\vec{D}$,

$$\frac{\vec{D}}{\epsilon_0} + \text{grad} \phi = - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \text{ soit } \vec{E} = -\text{grad} \phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

pour δx^i , l'équation du mouvement :

$$m \frac{du^i}{dt} = - e \frac{\partial V}{\partial x^i} - \int \rho^* \frac{\partial \phi}{\partial \xi^i} d\bar{\omega} + e \frac{\partial A_j}{\partial x^i} v^j + \int \rho^* \frac{\partial A_j}{\partial \xi^i} d\bar{\omega} v^j - e \frac{\partial A_i}{\partial x^j} v^j \\ - e \frac{\partial A^i}{\partial t} - \int \rho^* \frac{\partial A^i}{\partial \xi^j} d\bar{\omega} v^j - \int \rho^* \frac{\partial A^i}{\partial t} d\bar{\omega}$$

c'est à dire (5), pour $\partial \vec{A}$, l'équation de Maxwell-Ampère
 $\text{rot} \vec{H} = \rho^* \vec{v} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ et pour $\partial \phi$, l'autre équation, $\text{div} \vec{D} = \rho^*$.

La valeur de l'hamiltonien, compte tenu de (5) est :

$$(10) \quad W = mu^0 c^2 + eV(x) + \int \frac{\epsilon_0 E^2 + \mu_0 H^2}{2} d\bar{\omega}$$

On voit que c'est bien l'énergie totale du système et que, lorsque $\partial V/\partial t = 0$, elle est constante dans le mouvement.

Enfin, comme dans tout système hamiltonien, il existe une 2-forme invariante qui est

$$(11) \quad \omega = \left[\int \delta(p_i) d\omega \right] \wedge \delta x^i - \int \partial D_i \wedge \partial A^i d\omega$$

soit, en explicitant p_i à l'aide de (7) :

$$(12) \quad \omega = \delta(mu^i + eA^i(x)) \wedge \delta x_i + \left(\int \rho^* \delta A_i d\omega \right) \wedge \delta x^i - \int \partial D_i \wedge \partial A^i d\omega$$

Ce formalisme permet de voir que l'évolution du système régi par les équations (5) est bien déterminée dès que l'on se donne, à un instant initial t_0 , les valeurs des variables $\vec{x}, \vec{v}, \vec{A}, \vec{D}, \phi$, et ceci aussi bien pour l'avenir, $t > t_0$, que pour le passé $t < t_0$. Le système est donc amphidrome, mais, répétons le, à condition seulement d'inclure dans les variables indépendantes susceptibles d'être imposées à l'instant initial, les champs électromagnétiques internes. Si l'on n'observe que la matière (décrite par $\vec{x}$ et $\vec{v}$), le mouvement est indéterminé tant qu'on ne se donne que $\vec{x}_0$ et $\vec{v}_0$. C'est cette indétermination que l'on retrouve dans l'équation de Lorentz qui nécessite, outre les conditions habituelles, la donnée de $\vec{\gamma}_0$.

Ici contrairement à ce que l'on fait pour cette dernière équation, on n'a pas à se préoccuper de l'allure du mouvement pour t croissant indéfiniment : en effet, tant que le potentiel externe $V(x, t)$ reste fini pour tout (x, t) , il suffit que les données initiales, en particulier celles du champ soient telles que W_0 (donné par (10)) soit fini pour que l'énergie W le reste quel que soit $t \in [-\infty, +\infty]$, puisque c'est une constante du mouvement. Dans ces conditions, les premier et dernier termes de (10) étant positifs, restent également finis pour tout instant t . En particulier il est alors impossible, puisque $u^0 < \frac{W_0 - eV}{m c^2}$

, ce qui entraîne u^0 fini et donc $|\vec{v}| < c$, que l'accélération

$\vec{\gamma}$ croisse indéfiniment^{*}. On voit ainsi que la condition supplémentaire imposée dans la théorie de l'équation de Lorentz, sur le comportement du système à l'infini est une conséquence d'une condition beaucoup plus naturelle sur la finitude de l'énergie à l'instant initial (ou à tout autre instant d'ailleurs).

Il faut également noter que le mouvement uniforme, $\vec{v} = c \frac{te}{e}$, de la particule est solution des équations du mouvement lorsque le champ extérieur est nul. En effet, si on se place dans le référentiel propre du système décrit par (5), et si l'on suppose que le mouvement a été uniforme depuis $t = -\infty$ jusqu'à l'instant initial, le champ dans le référentiel propre est coulombien et la force d'autoaction est nulle; la seule solution du mouvement est alors $d\vec{u}/dt = 0$, et le mouvement continue à être uniforme. Il est important de remarquer que si l'on se donne à l'instant initial un champ électromagnétique interne quelconque (soumis à la seule condition $W_0 < \infty$), et même si le système n'est soumis à aucun champ externe, le mouvement, quoique bien déterminé, n'est pas nécessairement uniforme, comme dans le cas où le champ était de type statique.

Enfin si nous appelons

$$(13) \quad \vec{\pi} = m \vec{u} + e \vec{A}(x)$$

la partie de $\int p_i d\omega$ qui serait la même en l'absence de champ interne, et qui est identique à celle d'un point matériel chargé sans étendue on voit que ω , qui s'écrit

$$\omega = \delta\pi_i \wedge \delta x^i + \left(\int \rho \delta A_i d\omega \right) \wedge \delta x^i - \int \partial D_i \wedge \partial A^i d\omega$$

à comme premier terme l'expression habituelle en mécanique du point matériel chargé. On peut alors construire, à partir de ω l'élément de volume dans l'espace des phases de ce point matériel, qui est:

$$dV = d\pi_1 \wedge dx^1 \wedge d\pi_2 \wedge dx^2 \wedge d\pi_3 \wedge dx^3$$

* A la limite non relativiste, l'énergie totale est $\frac{1}{2} m v^2 + e V + \int \frac{\epsilon_0 E^2 + \mu_0 H^2}{2} d\omega$ et la condition $W < \infty$, entraîne $\frac{1}{2} m v^2$ fini; là encore, on trouve que v doit rester fini et il n'y a pas de solutions "divergentes" telles que γ croisse indéfiniment.

et l'invariance de ω permet d'écrire :

$$0 = \frac{d}{dt} \frac{dV}{dt} + \text{terme supplémentaire, d'où } \frac{d}{dt} \frac{dV}{dt} \neq 0$$

On voit ainsi que le théorème de Liouville n'est plus vérifié, pour le système dont les équations du mouvement sont (5), dans l'espace des phases $(\vec{\pi}, \vec{x})$ de la matière seule : il y a une variation du volume due à l'interaction entre le corpuscule et son propre champ électromagnétique interne.

Le terme supplémentaire contenant en facteur les variations du potentiel vecteur interne, reflétant l'indétermination que l'on rencontre pour résoudre les équations si l'on ne connaît que la position de l'électron et non son champ électromagnétique, est en définitive dû au fait qu'un grand nombre de passés, responsables de la valeur du champ à l'instant initial, sont compatibles avec la position initiale de la particule dans son espace des phases. Ceci est donc lié au fait que la dynamique du système considéré ici est héréditaire, comme nous allons le voir au paragraphe suivant.

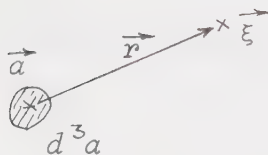
C.- Forme héréditaire du mouvement de l'électron de Lorentz.

Nous allons montrer maintenant que les équations (5) peuvent se ramener à des équations ne faisant intervenir que les coordonnées du corpuscule, mais qui sont alors de type héréditaire.

En effet, il suffit de résoudre les équations (5).b par les formules des potentiels retardés. On a ainsi, en posant

$$\vec{r} = \vec{\xi} - \vec{a}, \quad \vec{\xi} \text{ point potentié, } \vec{a} \text{ point potentialant}$$

$$\vec{j} = \rho \vec{u} = \rho^* \vec{v} ; \quad r = |\vec{r}|$$

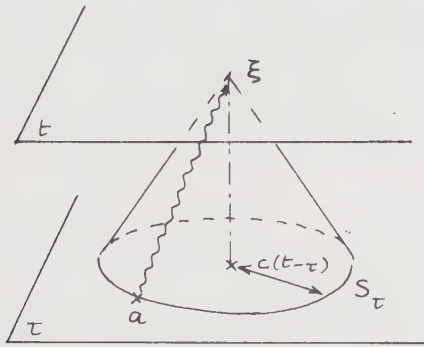


$$(14) \quad \left\{ \begin{array}{l} \phi(\vec{\xi}, t) = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \int \frac{\rho^*(\vec{a}, t-r/c)}{r} d^3a \\ A(\vec{\xi}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}(\vec{a}, t-r/c)}{r} d^3a \end{array} \right.$$

On en tire les champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ au point $(\vec{\xi}, t)$ par les formules classiques, ce qui donne, en utilisant l'équation de conservation de la charge :

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{E}(\vec{\xi}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \left[\left(\frac{1}{r} \rho^*(\vec{a}, t-r/c) + \frac{1}{c} \frac{\partial \rho^*}{\partial t}(\vec{a}, t-r/c) \right) \frac{\vec{r}}{r^2} - \frac{1}{c^2 r} \frac{\partial \vec{j}}{\partial t}(\vec{a}, t-r/c) \right] d^3a \\ \vec{B}(\vec{\xi}, t) = \frac{-1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \int \frac{\vec{r}}{r^2} \wedge \left(\frac{1}{r} \vec{j}(\vec{a}, t-r/c) + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{j}}{\partial t}(\vec{a}, t-r/c) \right) d^3a \end{array} \right.$$

Enfin, au lieu d'intégrer sur le point potentialisant en faisant varier l'instant auquel on calcule la densité de charge, nous allons sommer d'abord sur



les sphères S_τ (voir figure ci-contre) de centre $\vec{\xi}$ et de rayon $c(t-\tau)$, lieux des points ayant émis à l'instant τ le champ arrivant en $\vec{\xi}$ à l'instant t puis sur l'instant τ d'émission. Nous posons donc dans les

formules précédentes: $\vec{r} = c \vec{n}(t-\tau)$

$\vec{n}$ vecteur unitaire correspondant à l'élément d'angle solide $d\Omega$, de sorte que l'élément de volume potentialisant soit $d^3a = -c^3(t-\tau)^2 d\tau d\Omega$. La trajectoire du centre de gravité étant $\vec{x}(t)$ et ρ^* étant donné par (4), ceci donne :

$$(15) \left\{ \begin{array}{l} \vec{E}(\vec{\xi}, t) = \frac{c}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^t d\tau \iint \left(f \{ \vec{\xi} - c\vec{n}(t-\tau) - \vec{x}(\tau) \} \left\{ \vec{n} - \frac{t-\tau}{c} \vec{\gamma}(\tau) \right\} \right. \\ \quad \left. - (t-\tau) \vec{\text{grad}} f \{ \vec{\xi} - c\vec{n}(t-\tau) - \vec{x}(\tau) \} \cdot \vec{v}(\tau) \left(\vec{n} - \frac{\vec{v}(\tau)}{c} \right) \right) d\Omega \\ B(\vec{\xi}, t) = \frac{-1}{4\pi\epsilon_0 c} \int_{-\infty}^t d\tau \iint \vec{n} \wedge \left(f \{ \vec{\xi} - c\vec{n}(t-\tau) - \vec{x}(\tau) \} \{ \vec{v}(\tau) + (t-\tau) \vec{\gamma}(\tau) \} \right. \\ \quad \left. - (t-\tau) (\vec{v}(\tau) \cdot \vec{\text{grad}} f \{ \vec{\xi} - c\vec{n}(t-\tau) - \vec{x}(\tau) \}) \vec{v}(\tau) \right) d\Omega \end{array} \right.$$

où l'on a tenu compte des relations

$$\frac{\partial \rho^*}{\partial t} = -\vec{v} \cdot \vec{\text{grad}} f, \quad \frac{\partial \vec{j}}{\partial t} = -\vec{v} \cdot \vec{\text{grad}} f \vec{v} + f \vec{\gamma}$$

La résultante $\vec{F}(t)$ des forces internes exercées par l'électron sur

lui-même, de valeur

$$(16) \quad \vec{F}(t) = \int f(\vec{\xi} - \vec{x}(t)) \left(\vec{E}(\vec{\xi}, t) + \vec{v}(t) \wedge \vec{B}(\vec{\xi}, t) \right) d\omega$$

prend alors la forme d'une intégrale héréditaire portant sur tout le passé de la particule :

$$(17) \quad \vec{F}(t) = \int_{-\infty}^t \vec{Y} \{ \vec{x}(t), \vec{v}(t), \vec{x}(\tau), \vec{v}(\tau), \vec{\gamma}(\tau), t-\tau \} d\tau$$

où $\vec{Y}$ est la fonction calculée à partir de (15) et (16) à l'aide d'intégrales en $d\Omega d\omega$ portant sur f et ses dérivées, donc ne dépendant que de la répartition de charge (donnée une fois pour toutes avec les hypothèses adoptées ici), ce qui fait qu'elle est connue et fixée dès que l'on adopte une forme déterminée de l'électron .

On remarque que $\vec{F} \neq 0$, et ceci vient de ce que le principe d'égalité de l'action et de la réaction n'est plus vrai lorsque les champs ne sont plus instantanés, propriété bien connue en relativité et liée ici au caractère héréditaire du mouvement .

Les équations du mouvement d'ensemble sont alors :

$$(18) \quad m \frac{d\vec{u}}{dt} = e \vec{E}(x) + e\vec{v} \wedge \vec{B}(x) + \int_{-\infty}^t \vec{Y}(\vec{x}(t), \vec{v}(t), \vec{x}(\tau), \vec{v}(\tau), \vec{\gamma}(\tau), t-\tau) d\tau$$

Elles sont d'un type général que nous étudierons au paragraphe suivant . Mais auparavant nous allons faire quelques remarques .

En liaison avec ce qui avait été signalé au chapitre II, on voit sur cet exemple comment l'introduction dans la mécanique d'un milieu étendu, du champ électromagnétique retardé interne, conduit à des équations héréditaires . Il faut noter qu'ici le champ est bien défini dans l'espace physique à 3 dimensions, quoiqu'il puisse se déduire, par les formules (15) des potentiels retardés, du champ , défini dans un espace à une dimension qu'est $\vec{p}(a, t) = H(a) \vec{x}(t-a)$ (formule (10) du chapitre II).

Ici encore, on retrouve le caractère global des équations héréditaires : c'est en effet parce que nous n'avons retenu que le mouvement d'ensemble qu'il

a suffi de considérer la résultante $\vec{F}$ des forces internes, grandeur donnée par une somme portant sur toute l'étendue de l'électron ce qui permet de mettre le mouvement sous forme héréditaire .

On remarque aussi, en liaison avec le paragraphe B , que, le champ interne étant absolument quelconque, mise à part la restriction sur l'énergie, l'intégrale héréditaire ne vérifie pas, en général, les conditions de réductibilité données au chapitre II ; ceci entraîne que *le mouvement héréditaire étudié ici est irréductible*, en particulier certainement pas à l'équation de Lorentz avec son seul terme en $\dot{\vec{Y}}$.

Parmi les résultats du paragraphe précédent, figurait l'existence d'un invariant scalaire du mouvement, l'énergie totale, et d'une 2-forme différentielle invariante, la forme symplectique(12) . Comme les deux formulations, héréditaire ou hamiltonienne avec champs sont équivalentes, *ces deux invariants peuvent s'écrire*, bien que ce soit assez compliqué pour que nous ne le donnions pas explicitement ici, *en fonction du mouvement sous forme héréditaire*, grâce aux intégrales (14) qui jouent le rôle de formules de changement de variables. En particulier, la 2-forme est donnée par une expression du type

$$\begin{aligned} \omega = & m\delta v_i \wedge \delta x^i + a_{ij} \delta x^j \wedge \delta x^i + \int_{-\infty}^t \left(b\delta v_i(\tau) \delta x^i(t) + c_{ij} \delta x^j(\tau) \wedge \delta x^i(t) \right) d\tau \\ & + \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^t \left(g_{ij} \delta x^j(\tau) \wedge \delta v^i(\theta) + k_{jk} \delta x^j(\tau) \wedge \delta x^k(\theta) + l_{ij} \delta v^j(\tau) \wedge \delta v^i(\theta) \right. \\ & \left. + m\delta \gamma^i(\tau) \wedge \delta v_i(\theta) + r_{ik} \delta \gamma^i(\tau) \wedge \delta x^k(\theta) \right) d\tau d\theta \end{aligned}$$

Les coefficients qui y figurent sont des fonctions du mouvement, y compris dans le passé, de t , et, éventuellement de τ et θ . La mécanique symplectique peut alors s'étendre aux systèmes héréditaires. (Etant entendu que ceci entraîne, en variables canoniques, l'existence d'équations différentielles équivalentes .)

II .- VARIATION DU VOLUME DE L'ESPACE DES PHASES EN MECANIQUE HEREDITAIRE.

En généralisant la forme (18) des équations du mouvement de l'électron de Lorentz, considérons l'équation d'évolution héréditaire :

$$(19) \quad m \gamma = \dot{X}(x, v, t) + \int_{-\infty}^t Y\{x(t), x(\tau), v(t), v(\tau), \gamma(\tau), t-\tau\} d\tau$$

portant sur la variable $x \in R^3$, de dérivées $\dot{x} = v$, $\dot{v} = \gamma$.

Cette équation est de type Volterra non linéaire et à borne inférieure infinie, ce qui peut entraîner certaines difficultés. Cependant, si nous supposons connu le mouvement dans le passé, $t < 0$, compatible avec les équations du mouvement, ces difficultés peuvent être levées en ramenant l'équation (19) à une équation de Volterra à borne inférieure finie. En effet, la force héréditaire peut s'écrire, pour tout $t > 0$:

$$\int_{-\infty}^0 Y\{x(t), x(\tau), v(t), v(\tau), \gamma(\tau), t-\tau\} d\tau + \int_0^t Y\{x(t), x(\tau), v(t), v(\tau), \gamma(\tau), t-\tau\} d\tau$$

l'instant $t = 0$ étant l'instant initial à partir duquel on se propose de calculer le mouvement de la particule. La première intégrale est alors une fonction connue de $x(t)$, $v(t)$, t de sorte que l'équation (19) du mouvement s'écrit, en posant

$$(20) \quad m \gamma = X(x, v, t) + \int_0^t Y\{x, x(\tau), v, v(\tau), \gamma(\tau), t-\tau\} d\tau$$

Elle est du type Volterra non linéaire à borne inférieure finie et, moyennant certaines conditions de Lipchitz sur X et Y , le théorème de Tonelli (voir L. Tonelli (25)) assure l'existence et l'unicité d'une solution. Ce théorème s'applique en particulier, comme on peut le démontrer, dans le cas précédent de l'électron de Lorentz relativiste, lorsque l'on suppose que le mouvement jusqu'à l'instant $t = 0$ a été un mouvement uniforme dans un champ extérieur nul, mouvement dont on a déjà vu qu'il ne soulevait aucune difficulté.

Nous allons désormais supposer de même, que l'équation (19) admet, lorsque $\tilde{X} = 0$, tout mouvement uniforme comme solution et, que le mouvement a bien été tel jusqu'à $t = 0$. Ceci entraîne alors que (20) est de la forme, pour tous les mouvements ayant été uniformes jusqu'à $t = 0$:

$$(21) \quad m \gamma = X(x, v, x_0, v_0, t) + \int_0^t Y\{x, x(\tau), v, v(\tau), t-\tau\} d\tau$$

Dans ce cas, les conditions initiales x_0 , v_0 déterminent le mouvement dans tout l'avenir : on a un système fatal et héréditaire au sens de T. Vogel (27). L'espace des phases est alors $\{(x, v)\}$. Nous allons étudier maintenant par les méthodes héréditaires l'évolution du volume de cet espace et retrouver la plupart des résultats du § I, B.

Soit $x(t)$ une trajectoire de (21), considérons un "petit mouvement" $\delta x(t)$ définissant une trajectoire voisine $x(t) + \delta x(t)$. On a

$$\delta v = \frac{d \delta x}{dt}, \quad \delta \gamma = \frac{d \delta v}{dt} \quad \text{etc...}$$

et l'équation aux variations déduite de (21), qui régit les petits mouvements est :

$$(22) \quad m \delta \gamma^i = \frac{\partial X^i}{\partial x_j^0} \delta x_j^0 + \frac{\partial X^i}{\partial v_j^0} \delta v_j^0 + \left(\frac{\partial X^i}{\partial x^j} + \int_0^t \frac{\partial Y^i}{\partial x^j} d\tau \right) \delta x^j + \left(\frac{\partial X^i}{\partial v^j} + \int_0^t \frac{\partial Y^i}{\partial v^j} d\tau \right) \delta v^j \\ + \int_0^t \frac{\partial Y^i}{\partial x_j^j(\tau)} \delta x_j^j(\tau) d\tau + \int_0^t \frac{\partial Y^i}{\partial v_j^j(\tau)} \delta v_j^j(\tau) d\tau + \int_0^t \frac{\partial Y^i}{\partial \gamma_j^j(\tau)} \delta \gamma_j^j(\tau) d\tau$$

où les arguments de X et Y sont les mêmes que dans (21) et se rapportent à la trajectoire principale. Des calculs faits en l'appendice 3 montrent alors que cette équation peut se mettre sous la forme :

$$(23) \quad m \delta \gamma^i = A_j^i(t) \delta x^j + B_j^i(t) \delta v^j + \int_0^t C_j^i(t, \tau) \delta \gamma^j(\tau) d\tau$$

la valeur des coefficients étant donnée par les équations (13), (14), (15) de cet appendice.

Cette équation en $\delta \gamma$ est une équation de Volterra de noyau $\frac{1}{m} C_j^i(t, \tau)$. Soit $R_j^i(t, \tau)$ son noyau résolvant ; on a :

$$m \delta \gamma^i = A_j^i \delta x^j + B_j^i \delta v^j + \int_0^t R_k^i(t, \tau) A_j^k(\tau) \delta x^j(\tau) d\tau \\ + \int_0^t R_k^i(t, \tau) B_j^k(\tau) \delta v^j(\tau) d\tau$$

en intégrant entre 0 et t, il vient ($\delta v_0^i = \delta v^i(0)$) :

$$m (\delta v^i(t) - \delta v_0^i) = \int_0^t A_j^i(\theta) \delta x^j(\theta) d\theta + \int_0^t d\theta \int_0^\theta R_k^i(\theta, \tau) A_j^k(\tau) \delta x^j(\tau) d\tau \\ + \int_0^t B_j^i(\theta) \delta v^j(\theta) d\theta + \int_0^t d\theta \int_0^\theta R_k^i(\theta, \tau) B_j^k(\tau) \delta v^j(\tau) d\tau$$

En changeant l'ordre des sommations et en ajoutant l'équation

$$\delta x^i(t) = \delta x_0^i + \int_0^t \delta v^i(\theta) d\theta, \text{ conséquence de } \delta v = \frac{d \delta x}{dt}, \text{ on obtient le}$$

système d'équations reliant $\delta x^i(t)$, $\delta v^i(t)$ à δx_0^i , δv_0^i :

$$\delta x^i(t) = \delta x_0^i + \int_0^t \delta v^i(\tau) d\tau \\ (24) \quad \delta v^i(t) = \delta v_0^i + \frac{1}{m} \int_0^t \left(A_j^i(\tau) + \int_\tau^t R_k^i(\theta, \tau) A_j^k(\tau) d\theta \right) \delta x^j(\tau) d\tau \\ + \frac{1}{m} \int_0^t \left(B_j^i(\tau) + \int_\tau^t R_k^i(\theta, \tau) B_j^k(\tau) d\theta \right) \delta v^j(\tau) d\tau$$

ou encore, en notation matricielle :

$$(25) \quad \begin{pmatrix} \delta x(t) \\ \delta v(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta x_0 \\ \delta v_0 \end{pmatrix} + \int_0^t \begin{pmatrix} 0 & \delta_j^i \\ \mathcal{R}_j^i(t, \tau) & \mathcal{J}_j^i(t, \tau) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta x(\tau) \\ \delta v(\tau) \end{pmatrix} d\tau$$

Si $\Gamma(t, \tau)$ est le noyau résolvant de cette équation (matrice 6 x 6)

on a :

$$\begin{pmatrix} \delta x \\ \delta v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta x_0 \\ \delta v_0 \end{pmatrix} + \int_0^t \Gamma(t, \tau) \begin{pmatrix} \delta x_0 \\ \delta v_0 \end{pmatrix} d\tau$$

et en posant

$$(26) \quad M(t) = I + \int_0^t \Gamma(t, \tau) d\tau \quad I, \text{ matrice unité}$$

on a le lien entre δx , δv à l'instant t et leurs valeurs initiales :

$$(27) \quad \begin{pmatrix} \delta x \\ \delta v \end{pmatrix} = M(t) \begin{pmatrix} \delta x_0 \\ \delta v_0 \end{pmatrix}$$

L'évolution de M est régie par l'équation

$$(28) \quad M(t) = I + \int_0^t \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \mathcal{R} & \mathcal{S} \end{pmatrix} M(\tau) d\tau$$

$\mathcal{R}$, $\mathcal{S}$ étant les fonctions de t et τ définies précédemment .

On peut alors écrire l'évolution du volume dans l'espace des phases, $\delta V(t)$ en fonction du volume δV_0 à l'instant initial :

$$(29) \quad \delta V(t) = \det M(t) \delta V_0$$

D'après sa définition, la matrice $M(t)$ est inversible, au moins au début de l'évolution . On peut alors donner une forme analogue à celle du théorème de Liouville à l'évolution du volume . En effet, d'après les formules de dérivation d'un déterminant, on peut montrer que l'on a, quelle que soit $M(t)$, inversible :

$$\frac{d}{dt} \log \det M(t) = \text{Tr} \left(\frac{dM}{dt} M^{-1} \right)$$

où Tr désigne l'opération de trace et porte sur tout le contenu de la parenthèse.

D'après (29) on voit que

$$\frac{d}{dt} \log \det M = \frac{d}{dt} \log \left(\frac{\delta V(t)}{\delta V_0} \right) = \frac{1}{\delta V} \frac{d \delta V}{dt}$$

D'autre part, en dérivant (28), il vient :

$$\frac{dM}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \mathcal{R}(t, \tau) & \mathcal{S}(t, \tau) \end{pmatrix} M(t) + \int_0^t \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \mathcal{R}'_t(t, \tau) & \mathcal{S}'_t(t, \tau) \end{pmatrix} M(\tau) d\tau$$

d'où, en multipliant à droite par $M^{-1}(t)$, la variation du volume de l'espace des phases

$$(30) \quad \frac{1}{\delta V} \frac{d \delta V}{dt} = \text{Tr } \mathcal{J}(t, t) + \text{Tr} \int_0^t \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \mathcal{R}'_t(t, \tau) & \mathcal{L}'_t(t, \tau) \end{pmatrix} M(\tau) M^{-1}(t) d\tau$$

Afin d'interpréter cette formule, revenons au cas non héréditaire, pour lequel $Y = 0$; on peut alors voir, à l'aide des formules de l'appendice, que

$$A_j^i = \frac{\partial \tilde{X}^i}{\partial x^j}, \quad B_j^i = \frac{\partial \tilde{X}^i}{\partial v^j}, \quad C_j^i = 0, \quad R_j^i = 0, \text{ d'où}$$

$$\mathcal{R}_j^i(t, \tau) = A_j^i(\tau) = \frac{\partial \tilde{X}^i}{\partial x^j}(\tau), \quad \mathcal{L}_j^i(t, \tau) = B_j^i(\tau) = \frac{\partial \tilde{X}^i}{\partial v^j}(\tau)$$

ce qui entraîne que (30) devient

$$\frac{1}{\delta V} \frac{d \delta V}{dt} = \frac{\partial \tilde{X}^i}{\partial v^i}$$

On retrouve donc le théorème de Liouville dès que $\text{div } \tilde{X} = 0$. Les modifications entraînées par le caractère héréditaire du mouvement sont alors les suivantes : l'apparition, en plus du terme en $\text{div } \tilde{X}$, toujours présent, de termes supplémentaires, en général non nuls, ce qui montre que la variation du volume, donnée par (30) ne l'est pas non plus.

D'autre part, la formule (30) qui exige en toute rigueur de résoudre l'équation des petits mouvements pour calculer la variation de volume, permet aussi d'écrire aisément des *formules approchées*, en remarquant que les mémoires sont en général à affaiblissement très rapide ce qui fait que, dans les intégrales héréditaires, τ est peu différent de t et que l'on peut développer ces termes en $t - \tau$. Dans ces conditions, on a par exemple

$$M(\tau) M^{-1}(t) = 1 + \varepsilon \quad \text{si } t - \tau \text{ petit, d'où}$$

$$\frac{1}{\delta V} \frac{d \delta V}{dt} \approx \text{Tr } \mathcal{J}(t, t) + \text{Tr} \int_0^t \mathcal{L}'_t(t, \tau) d\tau + \varepsilon \text{Tr} \int_0^t \mathcal{L}'_t(t, \tau) d\tau$$

où, à son tour, $\mathcal{J}(t, \tau)$ est développable, ce qui permet d'obtenir une valeur

approchée de la variation de volume sans avoir à résoudre les équations du mouvement.

III.- APPROXIMATIONS POUR c GRAND.

A.- Electron de Lorentz .

Revenons au cas de l'électron étendu du § I,C . La cause de l'hérédité est alors le retard de propagation des champs, dû à la vitesse finie, c , de la lumière . Il est intéressant d'essayer de voir ce que donnent les résultats précédents lorsqu'on suppose c grand, de manière à pouvoir faire un développement en $1/c$.

Occupons-nous d'abord de la forme hamiltonienne des équations donnée au § I,B. Lorsque c croît indéfiniment, la force de Coulomb reste finie, ce qui montre que ϵ_0 le reste aussi et l'on voit, grâce à $\epsilon_0 \mu_0 c^2 = 1$ que $\mu_0 = 1/\epsilon_0 c^2$ est en $1/c^2$. Il en est donc, d'après la formule (14) des potentiels retardés, de même de $\vec{A}$. Changeons alors de variables en posant :

$$(31) \quad \vec{A} = \frac{1}{c^2} \vec{\alpha}$$

de sorte que la nouvelle variable $\vec{\alpha}$ reste finie lorsque $1/c \rightarrow 0$.

Le système des équations d'évolution (5) devient alors, dans le cas où le champ externe est nul, ce qui ne change rien aux propriétés que nous allons montrer et simplifie les écritures,

$$(32) \quad \left\{ \begin{array}{l} m \frac{d\vec{u}}{dt} = \int \rho^* (-g \vec{r} d\phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{\alpha}}{\partial t}) d\omega + \frac{1}{c^2} \int \rho^* \vec{v} \wedge \text{rot} \vec{\alpha} d\omega \\ \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = -\rho^* \vec{v} + \epsilon_0 \text{rot rot} \vec{\alpha} \quad , \quad \text{div} \vec{D} = \rho^* \end{array} \right.$$

les variables de mouvement ayant leurs définitions habituelles :

$$\vec{u} = u^0 \vec{v} \quad , \quad \vec{D} = -\epsilon_0 g \vec{r} d\phi - \frac{\epsilon_0}{c^2} \frac{\partial \vec{\alpha}}{\partial t}$$

Nous pouvons maintenant développer les équations du mouvement sous leur forme (32) . A l'ordre 0 en $1/c$, on retrouve les équations avec interaction électrostatique :

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \int \rho^* (-\vec{grad} \phi) d\omega \quad \text{div } \vec{D} = \rho^* \quad , \quad \vec{D} = -\epsilon_0 \vec{grad} \phi$$

les autres équations du champ ne nous apprenant rien de plus en ce qui concerne le mouvement de la matière . Comme l'électron de Lorentz est en mouvement d'ensemble, la force électrostatique ainsi trouvée est nulle, et il n'y a pas d'action de l'électron sur lui-même . Le mouvement est celui d'un point matériel chargé, donc hamiltonien .

Dans le cas plus général d'un fluide, on verrait de même que le mouvement, décrit sans approximation par les équations III, (40) et (41) peut se déduire, à l'ordre 0 en $1/c$, de l'hamiltonien

$$H = \int \left(\frac{1}{2} \mu v^2 - \mu Q + \frac{1}{2} \mu G \right) d\omega + \int \rho V d\omega + \int \left(\frac{D^2}{2\epsilon_0} + \vec{D} \cdot \vec{grad} \phi \right) d\omega$$

si l'on conserve ϕ et $\vec{D}$ comme variables indépendantes . La 2-forme invariante se simplifie en

$$\int \mu \delta v_i \wedge \delta x^i d\omega$$

ce qui montre qu'il existe un hamiltonien pour le fluide seul, qui est

$$H = \left(\frac{1}{2} \mu v^2 - \mu Q + \frac{1}{2} \mu G \right) d\omega + \frac{1}{2} \int \frac{\rho(\vec{x}) \rho(\vec{y})}{|\vec{x}-\vec{y}|} d^3x d^3y$$

analogue à celui du mouvement stationnaire considéré par F.Fer (9) .

Revenons à l'électron de Lorentz . A l'ordre $1/c$, rien ne change puisque $1/c$ n'intervient dans les équations (32) que par des termes en $1/c^2$.

A l'ordre $1/c^2$, enfin , on retrouve les équations (32) complètes, sans aucune approximation et le développement s'arrête là, au moins en ce qui concerne les champs (le développement des termes purement mécaniques est bien connu

en relativité et correspond, dans l'hamiltonien à un simple développement de l'énergie cinétique).

On voit ainsi que, si l'on veut conserver le formalisme hamiltonien avec les variables canoniques utilisées jusqu'ici, il est impossible de faire un développement des équations suivant le paramètre $1/c$ qui soit intéressant car les deux seuls niveaux d'approximation possibles correspondent soit au terme d'interaction électrostatique, soit au système complet d'équations, en ce qui concerne les champs . Il semble ainsi difficile de trouver des approximations intéressantes en $1/c$ qui conservent le caractère hamiltonien du mouvement .

On peut cependant trouver un développement en $1/c$ qui ait un sens physique, mais il faut utiliser des variables non canoniques, en se servant de la forme héréditaire précédemment étudiée, c'est à dire en remplaçant les variables canoniques du champ par la trajectoire passée du système, les formules de transformation étant celles des potentiels retardés (14) . On obtient alors le développement en écrivant que

$$\vec{x}(\tau) = \vec{x}(t) + (\tau-t) \dot{\vec{x}}(t) + \dots + \frac{(\tau-t)^n}{n!} \ddot{\vec{x}}^{(n)}(t) + \dots$$

et que la mémoire est en fait limitée à des instants τ peu éloignés de t . En particulier, on peut voir ici que, si R est une longueur donnant un ordre de grandeur des dimensions de l'électron, la mémoire s'estompe dès que $t-\tau \gg R/c$, de sorte que le développement peut se faire en prenant R/c comme infiniment petit. Ce développement n'a cependant pas exactement la même signification que celui portant sur les variables canoniques, car il faut remarquer que la transformation (14) elle-même fait intervenir le paramètre $1/c$, de sorte que le développement des équations héréditaires est en fait un développement portant aussi bien sur les équations du mouvement originelles (5), que sur les formules de changement de variables .

Nous ne traiterons pas ici plus en détail de ce développement, on voit en effet aisément sur la forme (16) de la force d'autoaction que c'est le développement figurant dans le calcul de Lorentz, déjà amplement étudié (voir H.Arzeliers (1)), au moins en ce qui concerne son premier terme qui, comme on le sait fait intervenir la dérivée $\dot{\vec{\gamma}}$ de l'accélération . Ce mouvement, comme nous l'avons déjà dit dans

l'introduction, n'est pas hamiltonien, l'élément de volume dans l'espace des phases ne pouvant pas rester constant dans le mouvement, ce qui est une condition nécessaire des systèmes hamiltoniens. Ceci est d'ailleurs lié au problème des solutions à accélération infinie, qui, on le sait, forment presque tout l'ensemble des solutions de cette équation.

En résumé, les développements en $1/c$ (au sens mathématique du terme) c'est à dire, en fin de compte en v/c (il faut remarquer à ce propos que, suivant le type de trajectoire le coefficient de $\vec{\gamma}$ dans l'équation de Lorentz peut prendre différentes valeurs, comme l'a déjà signalé H. Arzeliès) ne fournissent ici de résultats intéressants que s'ils sont faits sur les conséquences des équations exactes du mouvement, (5) ou (20), et non sur ces équations elles-mêmes, sauf si l'on ne s'intéresse qu'au calcul approché des solutions sans vouloir en tirer des conséquences générales, en particulier pour $t = \pm \infty$.

B. - Systèmes de particules quasi-ponctuelles.

Nous allons ici obtenir une expression approchée de la variation de volume dans l'espace des phases d'un ensemble de particules en interaction relativiste, étendues mais condensées au sens où nous l'avons défini dans ce chapitre. De plus, cette expression sera limitée aux termes d'ordre $1/c^2$, qui, nous le verrons, ne sont pas nuls, ce qui montre qu'il y a effectivement variation de volume : le théorème de Liouville ne s'applique plus dès que l'on tient compte du retard de propagation des champs. Nous nous plaçons ici dans un référentiel donné et considérons des particules sans spin.

Pour calculer l'approximation en $1/c^2$ de la 2-forme invariante III-(25), dans le calcul du fluide quantique, il faut expliciter chacun de ses termes. On a ainsi, d'après III -(23) qui donne l'expression des variables canoniques :

$$\int \delta(p_i d\omega) \wedge \delta x^i = \int \delta(\{\mu u^\circ u_i + \rho u^\circ (A_i + \bar{A}_i)\} d\omega) \wedge \delta x^i$$

En utilisant l'équation de conservation de la masse III(22) et la forme I-(4) donnant la variation de u^i , on trouve :

$$\delta(p^i d\bar{w}) = \mu u^0 d\bar{w} u^i \frac{\delta F}{F} + \mu u^0 d\bar{w} \left\{ u^0 \delta v^i + \frac{v^i v^j}{c^2} (u^0)^3 \delta v_j \right\} + \rho u^0 d\bar{w} (\delta A^i + \delta \bar{A}^i)$$

On peut alors calculer δF à partir de III-(2) et de $F^2 = \mu/f^2$; en négligeant les termes d'ordre supérieur à $1/c^2$, il reste :

$$F = 1 - Q/c^2 + \sigma(1/c^4) \implies \delta F = -\delta Q/c^2 + \sigma(1/c^4)$$

où Q est le potentiel quantique newtonien III-(35). En remarquant en outre que

$$u^0 = (1 - v^2/c^2)^{-1/2} = 1 + v^2/2c^2 + \sigma(1/c^4)$$

il vient, en conservant δA^i qui est, comme on l'a vu au paragraphe précédent, d'ordre $1/c^2$, et $\delta \bar{A}^i$ que l'on peut, comme il est imposé, considérer comme indépendant de tout développement,

$$\delta(p_i d\bar{w}) = \mu^* \delta v_i d\bar{w} + \rho^* \delta A_i d\bar{w} + \frac{v_i v_j}{c^2} \delta v^j \mu^* d\bar{w} - \frac{v_i}{c^2} \delta Q \mu^* d\bar{w} + \rho^* \delta A_i d\bar{w} + \sigma(1/c^4)$$

$$\text{où } \mu^* = \mu u^0 \text{ et } \rho^* = \rho u^0$$

Le deuxième terme de β est, puisque f est considérée comme variable indépendante, en toute rigueur à conserver tel quel. Mais à l'approximation $1/c^2$, on voit que l'équation d'évolution III-(2), prise à l'ordre 0, est $f^2 = \mu$, ce qui suffit puisque le coefficient est déjà en $1/c^2$

$$\partial g \wedge \partial f = -\frac{\hbar^2}{m^2 c^2} \partial f \wedge \partial_t \partial f = -\frac{\hbar^2}{m^2 c^2} \partial \sqrt{\mu} \wedge \partial_t \partial \sqrt{\mu} + \sigma(1/c^4)$$

et l'on voit aisément que ceci s'écrit :

$$\partial g \wedge \partial f = -\frac{\hbar^2}{4m^2 c^2} \frac{\partial \mu}{\mu} \wedge \partial_t \partial \mu$$

L'équation de conservation de la masse donne alors

$$\partial \mu + \partial_j (\mu \delta x^j) = \sigma(1/c^4)$$

et ce terme vaut

$$\partial g \wedge \partial f = - \frac{\hbar^2}{4\pi^2 c^2} \frac{\partial_j (\mu \delta x^j)}{\mu} \partial_t \partial_j (\mu \delta x^j) + o(1/c^4)$$

On voit qu'il est exprimable en fonction des variables du fluide $\delta \vec{x}$ et $\delta \vec{v}$.

Le troisième terme, relatif au champ interne est aussi d'ordre $1/c^2$ puisque $\vec{A}$ l'est et que $\vec{D}$ est d'ordre 0. On peut alors prendre les premiers termes des développements de $\vec{A}$ et $\vec{D}$, ce qui donne d'après les formules (14) prises à l'ordre 0 en $1/c$ c'est à dire sans retard :

$$\begin{aligned} \vec{A} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \int \frac{\vec{j}(\vec{a}, t)}{r} d^3a & \phi &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{a}, t)}{r} d^3a \\ \vec{D} &= -g\vec{r} \text{grad } \phi \end{aligned}$$

Les variations en sont :

$$\partial \vec{A} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \int \frac{\partial \vec{j}(\vec{a}, t)}{r} d^3a \quad \partial \vec{D} = -g\vec{r} \text{grad } \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\partial \rho(\vec{a}, t)}{r} d^3a$$

Comme on a

$$\partial \vec{v} = \delta \vec{v} - \partial_j \vec{v} \delta x^j \quad \text{et} \quad \partial \rho + \partial_j (\rho \delta x^j) = 0$$

il vient :

$$\begin{aligned} \partial \vec{A} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \int \frac{1}{r} \{ -\partial_j (\rho \vec{v} \delta x^j) + \rho \delta \vec{v} \} d^3a \\ \partial \vec{D} &= g\vec{r} \text{grad } \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\partial_j (\rho \delta x^j)}{r} d^3a \end{aligned}$$

où l'on voit que, à l'ordre $1/c^2$, il est possible d'exprimer $\partial \vec{A}$ et $\partial \vec{D}$ en fonction des variables du mouvement de la matière à l'instant t considéré. La 2-forme extérieure $\partial D_i \wedge \partial A^i$, est alors une fonctionnelle de $\delta \vec{x}$, $\delta \vec{v}$.

A l'approximation $1/c^2$, la 2-forme invariante dans le mouvement du fluide quantique relativiste s'exprime donc en fonction des seules variations $\delta \vec{x}$ et $\delta \vec{v}$, (ce qui est remarquable, car il faut en général introduire soit les champs $\vec{A}$ et f , soit le mouvement passé $\vec{x}(\tau)$ du fluide), par la formule :

$$\begin{aligned}
 \beta_1 = & \int (\mu^* \delta v^i \wedge \delta x_i + \rho^* \delta A_i \wedge \delta x^i) d\bar{\omega} + \int \left[\mu \left(\frac{v^i v^j}{c^2} \delta v_j - \frac{v^i}{c^2} \delta Q \right) \right. \\
 & + \rho \frac{\partial A^i}{\partial x^j} \delta x^j + \rho \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \int \frac{1}{r} \left(-\partial_j (\rho v^i \delta x^j) + \rho \delta v^i \right) d^3 a \left. \right] \wedge \delta x_i d\bar{\omega} \\
 (33) \quad & - \int \frac{\hbar^2}{4\pi^2 c^2} \frac{\partial_j (\mu \delta x^j)}{\mu} \wedge \partial_t \partial_j (\mu \delta x^j) d\bar{\omega} - \frac{1}{16\pi^2 \epsilon_0 c^2} \int d\bar{\omega} \left[\int \frac{\partial}{\partial a^j} \left(\frac{1}{|\vec{x}-\vec{a}|} \right) \rho(\vec{a}) \right. \\
 & \left. v^i(\vec{a}) \delta x^j(\vec{a}) d^3 a + \int \frac{\rho(\vec{a})}{|\vec{x}-\vec{a}|} \delta v^i(a) d^3 a \right] \wedge \left[\int \frac{\partial}{\partial b^j} \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\frac{1}{|\vec{x}-\vec{b}|} \right) \rho(\vec{b}) \right. \\
 & \left. \delta x^j(\vec{b}) d^3 b \right]
 \end{aligned}$$

La première intégrale étant d'ordre 0 en $1/c$, les termes suivants d'ordre $1/c^2$, en définissant β_0 par

$$(34) \quad \beta_0 = \int (\mu^* \delta v^i + \rho^* \delta A^i) \wedge \delta x_i d\bar{\omega}$$

qui est la 2-forme pour un fluide sans champ interne retardé, on a

$$(35) \quad \beta_1 = \beta_0 + \alpha$$

où α est le terme complémentaire, d'ordre $1/c^2$, dû au retard de propagation des champs.

Nous allons maintenant particulariser l'expression (33) au cas où le fluide décrit en fait un ensemble de N particules très condensées, se déplaçant chacune d'un mouvement d'ensemble, leurs coordonnées étant respectivement x_α^i , $i = 1, 2, 3$, $\alpha = 1, \dots, N$, leurs vitesses v_α^i , leurs masses m_α , leurs charges e_α . On aura alors, approximativement :

$$(36) \quad \mu(x, t) \approx \sum_{\alpha} m_{\alpha} \delta(\vec{x} - \vec{x}_{\alpha}(t)) \quad (\delta, \text{ fonction de Dirac})$$

Soit δV l'élément de volume dans l'espace des phases (à $6N$ dimensions) de ces particules, de coordonnées x_α^i , $p_\alpha^i = m_\alpha v_\alpha^i + e_\alpha A^i(x_\alpha^j)$.

On a :

$$(37) \quad \delta V = \frac{1}{3N!} \left(\wedge \left(\sum_{\alpha} \delta p_{\alpha i} \wedge \delta x_{\alpha}^i \right) \right)^{3N}$$

Lorsque l'on néglige le retard de propagation du champ électromagnétique d'interaction entre ces particules, nous avons vu que β_0 était un invariant du mouvement . Or il vaut ici, grâce à (36) :

$$\beta_0 \approx \sum_{\alpha} \{ m_{\alpha} \delta v_{\alpha}^i + e_{\alpha} \delta A^i(x_{\alpha}^j) \} \wedge \delta x_{\alpha}^i = \sum_{\alpha} \delta p_{\alpha i} \wedge \delta x_{\alpha}^i$$

Ceci entraîne que $\delta V = \frac{1}{3N!} (\wedge \beta_0)^{3N}$. On a donc, comme dans ce cas $\frac{d\beta_0}{dt} = 0$,

$$\frac{d \delta V}{dt} = 0$$

c'est le théorème de Liouville comme il se doit .

Mais à l'approximation en $1/c^2$, la 2-forme invariante n'est plus β_0 mais β_1 de sorte que l'on a (β_1 et α étant des formes paires commutant) :

$$(38) \quad \frac{d \delta V}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{1}{3N!} \left(\wedge (\beta_1 - \alpha) \right)^{3N} + \varepsilon = \frac{-1}{(3N-1)!} \left(\wedge (\beta_1 - \alpha) \right)^{3N-1} \wedge \frac{d\alpha}{dt} + \varepsilon \neq 0$$

où ε résume les termes négligés en vertu des deux approximations faites: ceux d'ordre supérieur à $1/c^2$, ceux dûs au fait que les particules ne sont pas strictement ponctuelles, cas limite que nous ne pouvons considérer ici car il entraînerait $\alpha = \infty$, à cause des potentiels de type coulombien . On voit alors sur la formule précédente que la variation de volume dans l'espace des phases des particules quasi-ponctuelles n'est pas nulle en général et en outre que cette variation est d'ordre $1/c^2$: elle est due à la vitesse finie de propagation des actions à distance que sont le champ électromagnétique et, éventuellement, le champ quantique.

Appendice 1

ANNEXE AU CHAPITRE III

Réduction de l'hamiltonien général à spin à l'hamiltonien particulier du type de celui utilisé par W. Pauli (19) .

Nous partons de la forme suivante des équations d'une particule avec spin (équation (51) du chapitre III) :

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} m \frac{d\vec{v}}{dt} = e\vec{E} + e\vec{v} \wedge \vec{B} + \frac{e}{m} \sigma_i \text{grad} B^i - \frac{e^2 I}{2m^2} \text{grad} B^2 \\ \frac{d\vec{\sigma}}{dt} = \frac{e}{m} \vec{\sigma} \wedge \vec{B} \end{array} \right.$$

Nous allons profiter du fait que σ^2 et p_φ sont des intégrales premières du mouvement, dont l'hamiltonien est, en variables non conjuguées

$$(2) \quad H = \frac{1}{2m} (\vec{p} - e\vec{A})^2 + \frac{1}{2I} \sigma^2 - \frac{e}{m} \vec{\sigma} \cdot \vec{B} + \frac{e^2 I}{2m^2} B^2 + eV$$

pour les considérer comme des paramètres, qui interviendront dans un nouvel hamiltonien, plus simple .

Faisons le changement de variables canoniques angulaires :

$$q = (\chi, \theta, \phi) \longmapsto Q = (Q_\chi, Q_\varphi, Q_\sigma) \quad ; \quad p = (p_\chi, p_\theta, p_\varphi) \longmapsto P = (p_\chi, p_\varphi, \sigma)$$

où il faut déterminer $Q_\chi, Q_\varphi, Q_\sigma$. Le changement se fait à l'aide d'une fonction $\Phi(q, P)$ telle que

$$p = \frac{\partial \Phi}{\partial q} \quad , \quad Q = \frac{\partial \Phi}{\partial P}$$

Or, ici

$$(3) \quad \begin{aligned} p_\chi &= \frac{\partial \Phi}{\partial \chi} = P_\chi & p_\varphi &= \frac{\partial \Phi}{\partial \phi} = P_\varphi \\ p_\theta &= \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} = \left(\sigma^2 - \frac{1}{\sin^2 \theta} (P_\chi^2 + P_\varphi^2) + \frac{2 \cos \theta}{\sin^2 \theta} P_\chi P_\varphi \right)^{1/2} \end{aligned}$$

puisque

$$\sigma^2 = \frac{I}{m} g^{\alpha\beta} p_\alpha p_\beta = \frac{1}{\sin^2 \theta} p_\chi^2 - \frac{2 \cos \theta}{\sin^2 \theta} p_\chi p_\varphi + p_\theta^2 + \frac{1}{\sin^2 \theta} p_\varphi^2$$

On tire des équations (3) :

$$\Phi = \chi P_\chi + \phi P_\varphi + f(\theta, P_\chi, P_\varphi, \sigma)$$

avec

$$(4) \quad \frac{\partial f}{\partial \theta}(\theta, P) = \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} = p_\theta(\theta, P)$$

ce qui détermine f à une fonction arbitraire des P près, que nous choisirons par la suite. On a

$$(5) \quad Q_\chi = \chi + \frac{\partial f}{\partial P_\chi}, \quad Q_\varphi = \phi + \frac{\partial f}{\partial P_\varphi}, \quad Q_\sigma = \frac{\partial f}{\partial \sigma}$$

Voyons quelle est la forme du nouvel hamiltonien $\tilde{H}$. Comme on a $\dot{P}_\varphi = 0$ dans le mouvement, on a encore $\dot{P}_\sigma = 0$, donc $\partial \tilde{H} / \partial Q_\varphi = 0$. De même, comme $\dot{\sigma} = 0$, on a $\partial \tilde{H} / \partial Q_\sigma = 0$. Ceci montre que H ne dépend ni de Q_φ , ni de Q_σ .

Supposons maintenant p_φ et σ fixés pour l'ensemble des mouvements que l'on considère, c'est à dire qu'ils jouent le rôle de paramètres ; alors H ne dépend plus que des deux variables conjuguées Q_χ et P_χ . Quant à la valeur de $\tilde{H}$, elle est identique à (2), puisque $\partial \Phi / \partial t = 0$. Or, σ^2 étant un paramètre, $\sigma^2 / 2I$ est une constante que l'on peut éliminer de $\tilde{H}$ sans changer les équations du mouvement. On peut donc utiliser l'hamiltonien tronqué :

$$\tilde{H}(Q_\chi, P_\chi) = \frac{1}{2m} (\vec{p} - e\vec{A})^2 + eV - \frac{e}{m} \vec{\sigma} \cdot \vec{B} + \frac{e^2 I}{2m^2} B^2$$

dans lequel on peut faire tendre impunément I vers 0, les deux paramètres p_φ et σ gardant naturellement les valeurs finies qu'ils avaient déjà ; ceci donne

$$(6) \quad \tilde{H}(Q_\chi, P_\chi) = \frac{1}{2m} (\vec{p} - e\vec{A})^2 + eV - \frac{e}{m} \vec{\sigma} \cdot \vec{B}$$

où les variables indépendantes sont $\vec{x}$, $\vec{p}$, Q_χ et P_χ . Il reste à montrer, pour retrouver l'hamiltonien utilisé par Pauli, que l'on a, à la limite $I = 0$

$$Q_\chi = \chi + c^{te} \quad \text{et} \quad P_\chi = \sigma$$

Comme σ et p_φ restent finis dans le passage à la limite, il faut supposer que, lorsque $I \rightarrow 0$, ϕ croît indéfiniment de sorte que $I\dot{\phi}$ soit fini. Quant à $\dot{\chi}$ et $\dot{\theta}$, ils restent naturellement finis. Or on a

$$P_\chi = p_\chi = I\dot{\chi} + I\dot{\phi} \cos\theta + \frac{eI}{m} B_\chi \longrightarrow I\dot{\phi} \cos\theta$$

et $\sigma \rightarrow I\dot{\phi}$ car $I\dot{\chi}$ et $I\dot{\theta} \rightarrow 0$. Donc il vient, à la limite,

$$P_\chi = I\dot{\phi} \cos\theta = \sigma_z$$

qui est bien l'une des variables utilisées habituellement.

Quant à Q_χ , il est donné par (5) :

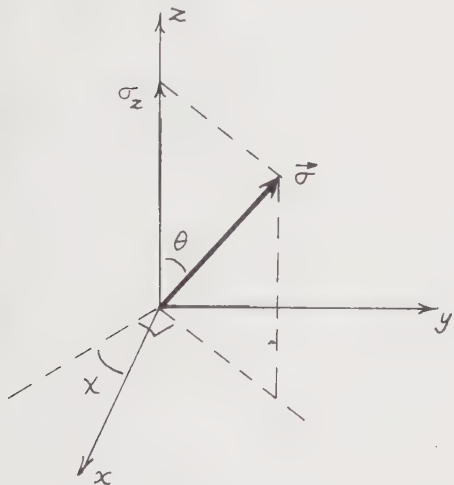
$$Q_\chi = \chi + \frac{\partial f}{\partial P_\chi}$$

Nous allons montrer qu'à la limite, on peut choisir $\partial f / \partial P_\chi = 0$. En effet, les for-

les (4) de transformation montrent que

$$\frac{\partial f}{\partial \theta} = p_\theta \longrightarrow 0 \quad \text{quand} \quad I \longrightarrow 0$$

En intégrant, on voit que la valeur limite f_1 de f , quand $I = 0$ est une fonction $f_1(P)$ des P seuls. Il suffit alors de choisir la fonction arbitraire $g(P)$ qui subsistait dans la définition de f , telle que $g + f_1 = 0$, pour que l'on



ait, à la limite :

$$Q_{\chi} = \chi$$

quand $I = 0$

Appendice 2

ANNEXE AU CHAPITRE III

Equation de Jacobi du fluide quantique .

On sait que la théorie de Jacobi s'étend aux milieux continus hamiltoniens (voir par exemple P.Levy (13)) et fait apparaître des équations aux dérivées partielles fonctionnelles telles que celles considérées par G.Juvet dans sa Thèse (11) . Nous adopterons ici une méthode permettant de mettre les équations sous forme d'égalités de formes différentielles, ce qui est plus pratique dans le cas continu.

Considérons le fluide quantique de Madelung, correspondant donc à l'équation de Schrödinger . Son hamiltonien est (voir l'équation (46)) :

$$(7) \quad H = \left(\mu \frac{v^2}{2} - \mu Q + \rho V \right) d\bar{w}$$

où

$$(8) \quad v_i = \frac{1}{\mu} p_i - \frac{e}{m} A_i$$

Nous emploierons ici tantôt les variables d'Euler, si nous ne précisons pas le point courant, tantôt les variables de Lagrange, toujours définies à l'aide du point a^j .

On peut alors voir que les équations du mouvement sont les équations du système caractéristique du système différentiel extérieur :

$$(9) \quad \begin{cases} H + \mathcal{E} = 0 \\ \delta \mathcal{J} - \int p_i \delta x^i d\bar{w} - \mathcal{E} \delta t = 0 \end{cases}$$

en variables $x^i(a), p_i(a), t, \mathcal{E}, \mathcal{J}$, dont les solutions sont les variétés intégrales de (9) définies par

$$(x^i(a), t) \longmapsto x^i(a), t, \mathcal{J}(x^j(b), t), p_i(x^j(b), t)$$

$\mathcal{J}$ et p_i étant des fonctionnelles de la configuration du fluide $x^i(a^j)$.

Supposons maintenant que la fonctionnelle $\mathcal{J}$ ait la forme

$$(10) \quad \mathcal{J} = \int \mu S(x^i, t) d\bar{w}$$

alors, la deuxième équation (9) donne

$$p_i = \int \mu \frac{\partial S}{\partial x^i} \quad , \quad \mathcal{E} = \int \mu \frac{\partial S}{\partial t} d\bar{w}$$

C'est la définition du mouvement irrotationnel déjà rencontré dans l'interprétation fluide de la mécanique quantique par la méthode de Madelung

Quant à la première équation (9), elle devient :

$$(11) \quad \int \left(\frac{1}{2} \mu \left(\partial_i S - \frac{e}{m} A_i \right)^2 - \mu Q + \rho V \right) d\bar{w} + \int \mu \frac{\partial S}{\partial t} d\bar{w} = 0$$

qui est l'équation aux dérivées partielles fonctionnelles de Jacobi du fluide de Madelung dans le cas irrotationnel. On constate alors que l'équation réelle dite de Jacobi (parce qu'à la limite non quantique elle correspond à l'équation de Jacobi du point matériel) de l'équation de Schrödinger a toutes ses solutions également solutions de (11), l'inverse n'étant pas vrai. En effet, l'équation de Schrödinger exprime simplement que l'intégrand de l'équation fonctionnelle (11) est nul.

Le même résultat est valable pour l'équation réelle de Bopp et Haag, (76), qui fournit aussi, par l'intermédiaire de la phase de l'onde et dans le cas irrotationnel dans l'espace à 6 dimensions, des solutions particulières de l'équation fonctionnelle de Jacobi du fluide quantique à spin.

Le cas de l'équation de Klein-Gordon est plus délicat mais semble bien être du même type. En effet, la présence dans le formalisme hamiltonien de f comme variable indépendante supplémentaire (comme ci-dessus nous restons dans le cas où l'on néglige les potentiels internes) entraîne que le système différentiel de Jacobi s'écrit :

$$(12) \quad \left\{ \begin{array}{l} H + \mathcal{E} = 0 \\ \delta \mathcal{J} - \int p_i \delta x^i d\bar{\omega} - \int g \delta f d\bar{\omega} - \mathcal{E} \delta t = 0 \end{array} \right.$$

où H est l'hamiltonien (26) sans les champs électromagnétiques internes et une fonctionnelle inconnue de $x^i(a)$, t , $f(x^i)$. On peut alors voir que les équations du mouvement sont celles des caractéristiques de ce système. Il faut d'ailleurs remarquer que, de même que dans le formalisme hamiltonien traditionnel, l'écriture d'une équation de Jacobi suppose que nous étudions le système dans un référentiel donné à l'aide d'équations sous forme tridimensionnelles, même si la dynamique considérée est relativiste. C'est aussi ce qui se passe en mécanique quantique relativiste.

Supposons alors que la fonctionnelle $\mathcal{J}$ soit de la forme

$$\mathcal{J} = \frac{\mu u^0}{F} S(x, t) d\bar{\omega} + \mathcal{J}_1(f, t)$$

c'est à dire que le mouvement du fluide soit irrotationnel et qu'il y ait séparation des variables relatives au fluide et au champ quantique. Le système fonctionnel différentiel de Jacobi s'écrit alors

$$\int \left\{ \mu (u^0)^2 c^2 + \frac{\mu u^0}{F} \frac{\partial S}{\partial t} + \rho u^0 V \right\} d\bar{\omega} + \int \left(-\frac{\mu c^2}{2} + \frac{g^2}{2\kappa} + \frac{c^2 f^2}{2} - \kappa \frac{c^2}{2} f \Delta f \right) d\bar{\omega} + \mathcal{E}_1 = 0$$

$$\frac{\mu u^0}{F} \frac{\partial S}{\partial x^i} = p_i \quad \text{et} \quad \delta \mathcal{J}_1 - \int g \delta f d\bar{\omega} - \mathcal{E}_1 \delta t = 0$$

où l'on suppose naturellement u^0 exprimé en fonction des variables canoniques .

On s'aperçoit alors que l'équation de Klein-Gordon entraîne que la première intégrale de la première équation est nulle et fournit donc des solutions particulières de l'équation de Jacobi du fluide, que l'on complète par l'équation de Jacobi du champ quantique :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} \int (- \mu c^2 + \frac{g^2}{\kappa} + c^2 f^2 - \kappa c^2 f \Delta f) d\bar{w} + \mathcal{E}_1 = 0 \\ \delta \mathcal{L}_1 - \int g \partial f - \mathcal{E}_1 \delta t = 0 \end{array} \right.$$

Appendice 3

ANNEXE AU CHAPITRE IV

Equation des petits mouvements sous forme héréditaire .

Pour établir l'équation (23), nous partons de (22) . On peut exprimer δx_0 , δv_0 , $\delta x(\tau)$, $\delta v(\tau)$, en fonction de $\delta x(t)$, $\delta v(t)$, et d'intégrales en $\delta \gamma(\theta)$ par les formules :

$$\begin{aligned}\delta v(\tau) &= \delta v(t) + \int_t^\tau \delta \gamma(\theta) d\theta = \delta v(t) - \int_\tau^t \delta \gamma(\theta) d\theta \\ \delta x(\tau) &= \delta x(t) + \int_t^\tau \delta v(s) ds = \delta x(t) + \int_t^\tau \delta v(t) ds - \int_t^\tau ds \int_s^t \delta \gamma(\theta) d\theta \\ \delta x(\tau) &= \delta x(t) - (t-\tau) \delta v(t) + \int_\tau^t (\theta-\tau) \delta \gamma(\theta) d\theta\end{aligned}$$

d'où, en particulier :

$$\begin{aligned}\delta v(0) &= \delta v(t) - \int_0^t \delta \gamma(\theta) d\theta \\ \delta x(0) &= \delta x(t) - t \delta v(t) + \int_0^t \theta \delta \gamma(\theta) d\theta\end{aligned}$$

En reportant dans (22) ceci, le coefficient de $\delta x^i(t)$ devient

$$A_j^i(t) = \frac{\partial X^i}{\partial x_j^0}(t) + \frac{\partial X^i}{\partial x^j}(t) + \int_0^t \frac{\partial \dot{Y}^i}{\partial x^j}(t, \tau) d\tau + \int_0^t \frac{\partial Y^i}{\partial x_\tau^j}(t, \tau) d\tau$$

En se servant de la définition (20) de X^i , on voit que

$$\begin{aligned}\frac{\partial X^i}{\partial x_o^j}(t) &= \int_{-\infty}^0 \frac{\partial Y^i}{\partial x_\tau^j}(t, \tau) d\tau \\ \frac{\partial X^i}{\partial x^j}(t) &= \frac{\partial \tilde{X}^i}{\partial x^j}(t) + \int_{-\infty}^0 \frac{\partial Y^i}{\partial x^j}(t, \tau) d\tau\end{aligned}$$

On en tire :

$$(13) \quad A_j^i(t) = \frac{\partial \tilde{X}^i}{\partial x^j}(t) + \int_{-\infty}^t \frac{\partial Y^i}{\partial x^j}(t, \tau) d\tau + \int_{-\infty}^t \frac{\partial Y^i}{\partial x_\tau^j}(t, \tau) d\tau$$

De même, il vient pour le coefficient de $\delta v(t)$:

$$\begin{aligned}B_j^i(t) &= -t \frac{\partial X^i}{\partial x_o^j}(t) + \frac{\partial X^i}{\partial v_o^j}(t) + \frac{\partial X^i}{\partial v^j}(t) + \int_0^t \frac{\partial Y^i}{\partial v^j}(t, \tau) d\tau \\ &\quad - \int_0^t (t-\tau) \frac{\partial Y^i}{\partial x_\tau^j}(t, \tau) d\tau + \int_0^t \frac{\partial Y^i}{\partial v_\tau^j}(t, \tau) d\tau\end{aligned}$$

Comme

$$\begin{aligned}\frac{\partial X^i}{\partial v_o^j}(t) &= \int_{-\infty}^0 \frac{\partial Y^i}{\partial x_\tau^j}(t, \tau) d\tau + \int_{-\infty}^0 \frac{\partial Y^i}{\partial v_\tau^j}(t, \tau) d\tau \\ \frac{\partial X^i}{\partial v^j}(t) &= \frac{\partial \tilde{X}^i}{\partial v^j}(t) + \int_{-\infty}^0 \frac{\partial Y^i}{\partial v^j}(t, \tau) d\tau\end{aligned}$$

on a

$$\begin{aligned}B_j^i(t) &= \frac{\partial \tilde{X}^i}{\partial v^j}(t) + \int_{-\infty}^0 \frac{\partial Y^i}{\partial x_\tau^j}(t, \tau) (t-\tau) d\tau - \int_0^t (t-\tau) \frac{\partial Y^i}{\partial x_\tau^j}(t, \tau) d\tau \\ &\quad + \int_{-\infty}^0 \frac{\partial Y^i}{\partial v^j}(t, \tau) d\tau + \int_0^t \frac{\partial Y^i}{\partial v^j}(t, \tau) d\tau + \int_{-\infty}^0 \frac{\partial Y^i}{\partial v^j}(t, \tau) d\tau + \int_{-\infty}^t \frac{\partial Y^i}{\partial v_\tau^j}(t, \tau) d\tau\end{aligned}$$

soit

$$(14) \quad B_j^i(t) = \frac{\partial \tilde{X}^i}{\partial v^j}(t) - \int_{-\infty}^t (t-\tau) \frac{\partial Y^i}{\partial x_\tau^j}(t, \tau) d\tau + \int_{-\infty}^t \frac{\partial Y^i}{\partial v^j}(t, \tau) d\tau + \int_{-\infty}^t \frac{\partial Y^i}{\partial v_\tau^j}(t, \tau) d\tau$$

Quant aux intégrales en $\delta \gamma^j(\theta)$, ce sont :

$$\begin{aligned} \int_0^t C_j^i(t, \tau) \delta \gamma^j(\tau) d\tau &= \frac{\partial X^i}{\partial x_\theta^j}(t) \int_0^t \theta \delta \gamma^j(\theta) d\theta - \frac{\partial X^i}{\partial v_\theta^j}(t) \int_0^t \delta \gamma^j(\theta) d\theta \\ &+ \int_0^t \frac{\partial Y^i}{\partial x_\tau^j}(t, \tau) d\tau \int_\tau^t (\theta - \tau) \delta \gamma^j(\theta) d\theta \\ &- \int_0^t \frac{\partial Y^i}{\partial v_\tau^j}(t, \tau) d\tau \int_\tau^t \delta \gamma^j(\theta) d\theta + \int_0^t \frac{\partial Y^i}{\partial \gamma^j}(t, \tau) \delta \gamma^j(\tau) d\tau \end{aligned}$$

avec les valeurs données plus haut de $\frac{\partial X^i}{\partial x_\theta^j}$ et $\frac{\partial X^i}{\partial v_\theta^j}$, et après échange de l'ordre d'intégration dans quelques intégrales, il vient :

$$(15) \quad C_j^i(t, \tau) = \int_{-\infty}^{\tau} (\tau - \theta) \frac{\partial Y^i}{\partial x_\tau^j}(t, \theta) d\theta - \int_{-\infty}^{\tau} \frac{\partial Y^i}{\partial v_\tau^j}(t, \theta) d\theta + \frac{\partial Y^i}{\partial \gamma^j}(t, \tau)$$

de sorte que (22) s'écrit :

$$(16) \quad m \delta \gamma^i(t) = A_j^i(t) \delta x^j(t) + B_j^i(t) \delta v^j(t) + \int_0^t C_j^i(t, \tau) \delta \gamma^j(\tau) d\tau$$

qui est l'équation cherchée.

VU ET PERMIS D'IMPRIMER

Marseille, le 13 Mai 1974

Le Président

F. BOREL

BIBLIOGRAPHIE

- (1) H.ARZELIÈS, Rayonnement et dynamique du corpuscule chargé fortement accéléré,
Gauthier-Villars, Paris, 1966.
- (2) F.BOPP & R.HAAG, Z.Naturforschung, 5a, 1950 , p.644 .
- (3) L.de BROGLIE, La théorie de la mesure en mécanique ondulatoire,
Gauthier-Villars, Paris, 1957 .
- (4) L.de BROGLIE, La mécanique ondulatoire des systèmes de corpuscules, 2° édition
Gauthier-Villars, Paris, 1950 .
- (5) L.de BROGLIE, J. Phys. 6, 1927 , p.225 et
L.de BROGLIE & J.L.ANDRADE e SILVA, La réinterprétation de la mécanique
ondulatoire, tome 1, Gauthier-Villars, Paris, 1971 .
- (6) E.CARTAN, Leçons sur les invariants intégraux, 3° tirage, Hermann, Paris, 1971.
- (7) J.-P. CAUBET, C.R. Acad. Sc., 274, 1972 , p.1502 .
- (8) F.FER, C.R. Acad. Sc., 260, 1965 , p.3873 & 4159, 265, 1967 , p. 205 & 289 .
- (9) F.FER, C.R. Acad. Sc., 258, 1964, p.2983, 3215 et 3435, 262, 1966 ,p.1417,
263, 1966 , p.103 .
- (10) I.M.GUELFAND & E.CHILOV, Les distributions, tome 3, Dunod, Paris, 1965 .
- (11) G.JUVET, Thèse, Paris, 1924 .
- (12) L.LANDAU, & E.LIFCHITZ, Théorie du champ, 2° édition, Moscou, 1966 .
- (13) P.LÉVY, Leçons d'analyse fonctionnelle, Gauthier-Villars, Paris, 1922 .
- (14) A.LICHNEROWICZ, Théories relativistes de la gravitation et de l'électromag-
nétisme, Masson, Paris, 1955 .
- (15) H.A.LORENTZ, The theory of electrons, réimpression de la 2° édition, Dover,
New-York, 1952
- (16) E.MADELUNG, Z.Physik, 40, 1926, p.322 .
- (17) J.E.MARSDEN, Arch.Rational mech. anal., 28, 1968, p. 362
- (18) W.K.H.PANOFSKY & M.PHILLIPS, Classical electricity and magnetism,
Addison-Wesley, 2° édition 1955.
- (19) W.PAULI, Z.Physik, 43, 1927 , p.601 .
- (20) B.PERSOZ, La rhéologie, Masson, Paris, 1969 .

- (21) G.N.PLASS, Bull.amer. Phy.Soc., 4, 1959, p.294 .
- (22) H.POINCARÉ, Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste, tome 3, Gauthier-Villars, Paris, 1899 .
- (23) F.ROHRLICH, Classical charged particles, Addison-Wesley, Reading, 1965 .
- (24) J.M.SOURIAU, Structure des systèmes dynamiques, Dunod, Paris, 1969
- (25) L.TONELLI , Bull. Calcutta math. soc., 20, 1928, p.31 .
- (26) N.Ja.VILENKIN, Fonctions spéciales et théorie de la représentation des groupes, Dunod, Paris, 1969 .
- (27) T.VOGEL, Théorie des systèmes évolutifs, Gauthier-Villars, Paris, 1965 .
- (28) V.VOLTERRA, Leçons sur les fonctions de lignes, Gauthier-Villars, Paris, 1913.
- (29) E.ZERMELO, Wied. Ann., 57, 1896 , p.485 et 59, 1896 , p.793. ; et J.LOSCHMIDT, Wien. Berichte, 73, 1876, p.135 et 366 .

T A B L E

INTRODUCTION	I
CHAPITRE I - Mouvement d'un fluide chargé et holonome	1
I - Définition et notations	3
II - 2-forme invariante dans le mouvement	7
III - Hamiltonien et lagrangien.....	17
IV - Conséquences sur le mouvement de la matière	22
CHAPITRE II - Réductibilité des systèmes héréditaires	24
I - Introduction.....	24
II - Réductibilité à des équations différentielles	25
III - Réductibilité à des systèmes étendus avec champ	28
CHAPITRE III - Fluides quantiques chargés en mécanique hamiltonienne.....	34
I - Equation de Klein - Gordon	35
II - Equation de Schrödinger.....	46
III - Equation de Pauli	50
CHAPITRE IV - Particules dans un champ faible : équation de Lorentz et théorème de Liouville.....	66
I - Electron de Lorentz.....	68
II - Variation du volume de l'espace des phases en mécanique héréditaire.....	79
III - Approximations pour $\underline{c}$ grand.....	84
Appendice 1	92
Appendice 2	96
Appendice 3	100
Bibliographie.....	104

